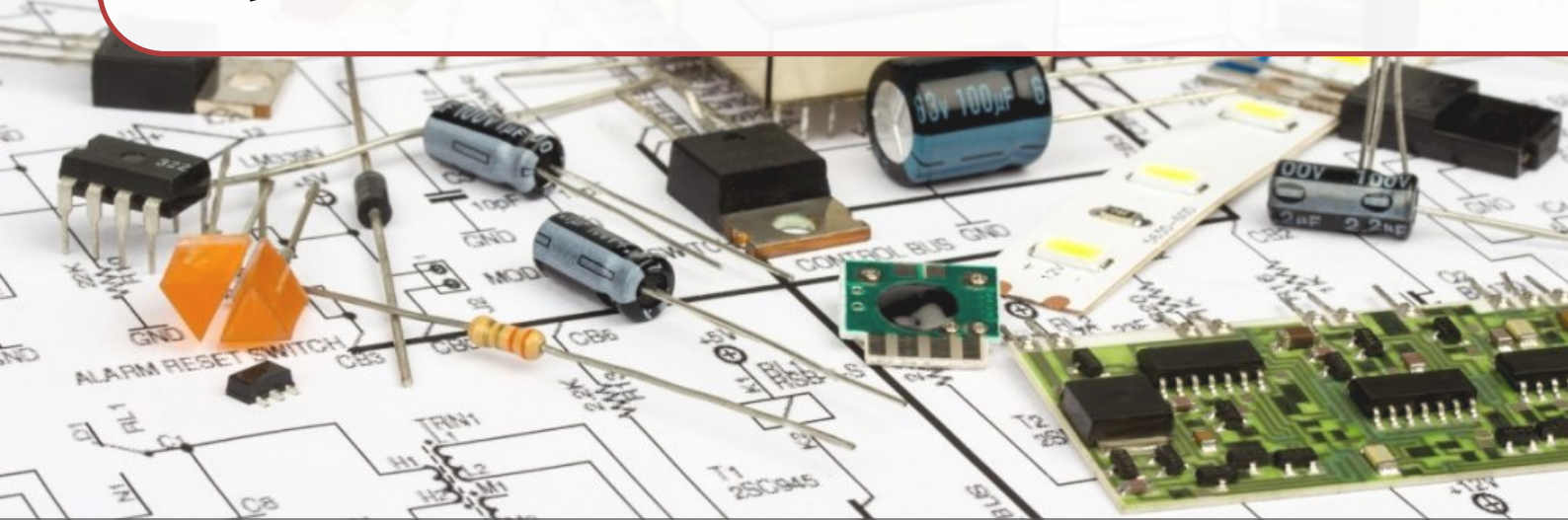


# Chapitre 5 : Filtrage linéaire



## LE COURS

### A Notions générales sur le filtrage linéaire

A.1	Caractère linéaire d'un filtre .....	2
A.2	Comportement d'un filtre linéaire en RSF et fonction de transfert .....	3
A.3	Filtrage d'un signal périodique .....	4
A.4	Nature et bande passante d'un filtre .....	7

### B Diagramme de Bode

B.1	Définition .....	8
B.2	Utilisation d'échelles logarithmiques .....	8
B.3	Exemple .....	9

### C Exemples de filtre

C.1	Filtre passe-bas d'ordre 1 .....	10
C.2	Filtre passe-haut d'ordre 1 .....	12
C.3	Filtre passe-bande d'ordre 2 .....	14
C.4	Filtre passe-bas d'ordre 2 .....	16

### D Réalisation d'opérations à l'aide de filtres

D.1	Comportement dérivateur d'un filtre .....	18
D.2	Comportement intégrateur d'un filtre .....	19
D.3	Comportement moyennneur .....	20

### E Impédances d'entrée et de sortie d'un filtre

E.1	Modélisation des bornes d'un filtre .....	21
E.2	Association en cascade de quadripôles .....	21

# A Notions générales sur le filtrage linéaire

## A.1 Caractère linéaire d'un filtre

### Définition

Un **filtre linéaire** est un système fournissant une grandeur de sortie  $s(t)$  (réponse du système) dépendant d'une grandeur d'entrée  $e(t)$  toutes deux reliées par une **équation différentielle linéaire à coefficients constants**.

L'**ordre d'un filtre** est l'ordre de la dérivée de plus haut rang apparaissant dans cette équation différentielle.

### Exemples

Dans le cas du circuit RC série alimenté par une tension  $u_e$ , la tension  $u_s$  aux bornes du condensateur vérifie :

$$\tau \dot{u}_s + u_s = u_e$$

Le filtre est donc d'ordre 1.

Dans le cas du circuit RLC série alimenté par une tension  $u_e$ , la tension  $u_s$  aux bornes du condensateur vérifie :

$$\ddot{u}_s + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_s + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 u_e$$

Le filtre est donc d'ordre 2.

Exemple de l'amortisseur de voiture tel qu'il a été modélisé dans l'Exercice 3 du chapitre OSC2 :

$$\ddot{\epsilon} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\epsilon} + \omega_0^2 \epsilon = \omega_0^2 z_c + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z}_c$$

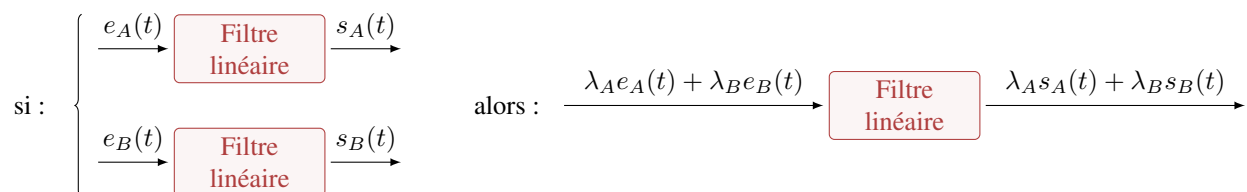
L'entrée est  $z_c$  (altitude de la roue suivant le relief de la route) et la sortie est  $\epsilon(t) = z(t) - z_{eq}$  (écart à la position d'équilibre). Il s'agit d'un filtre d'ordre 2.

### Principe de superposition

L'équation différentielle reliant la sortie et l'entrée est **linéaire**. Cela implique que l'on peut **superposer différentes solutions**. Dans le contexte de ce chapitre, nous le traduirons ainsi :

Pour un même filtre linéaire, si les sorties  $s_A(t)$  et  $s_B(t)$  sont solutions respectivement pour les entrées  $e_A(t)$  et  $e_B(t)$ , alors la solution pour l'entrée  $e(t) = \lambda_A e_A(t) + \lambda_B e_B(t)$  est  $s(t) = \lambda_A s_A(t) + \lambda_B s_B(t)$ .

Plus symboliquement, on peut le percevoir ainsi :



### Exemple

Application au circuit RC série :

Si l'entrée est  $u_e(t) = E_0 + E \cos(\omega t + \varphi_e)$ , alors en régime permanent, la sortie sera nécessairement de la forme  $u_s(t) = S_0 + S \cos(\omega t + \varphi_s)$  où :

- $S_0$  est une constante solution particulière de l'équation  $\tau \dot{u}_s + u_s = E_0$ , car de la même forme que le second membre.
- $S \cos(\omega t + \varphi_s)$  est une solution particulière de  $\tau \dot{u}_s + u_s = E \cos(\omega t + \varphi_e)$ , car de la même forme que le second membre aussi.

## A.2 Comportement d'un filtre linéaire en RSF et fonction de transfert

### a. Quelle est la forme de la sortie en RSF ?

En régime sinusoïdal forcé, les seconds membres des équations différentielles que nous avons à traiter sont par définition nécessairement de forme sinusoïdale de fréquence  $f$  donnée (cela étant imposé par l'expérimentateur ou bien des contraintes extérieures). Et puisque les solutions recherchées en régime permanent sont de la même forme que le second membre, on peut en déduire la propriété ci-dessous.

En RSF, l'entrée  $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e)$  étant sinusoïdale, on cherche alors une sortie sous forme sinusoïdale  $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi_s)$  de même fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ .

### b. Fonction de transfert harmonique d'un filtre linéaire

#### Exemple

Dans le cas du circuit RC série, par la méthode de résolution complexe, l'équation différentielle devient :

$$(1 + j\omega\tau)\underline{u}_s = \underline{u}_e$$

$$\underline{u}_s = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \underline{u}_e$$

On notera :  $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$ , de sorte que :  $\underline{u}_s = \underline{H}(\omega) \underline{u}_e$ .

Généralisation :

#### Fonction de transfert harmonique

En notation complexe, l'équation différentielle reliant  $e(t)$  et  $s(t)$  devient un lien de proportionnalité entre  $\underline{e}$  et  $\underline{s}$ .

On définit alors la **fonction de transfert harmonique**  $\underline{H}(\omega)$  du système telle que :

$$\underline{s} = \underline{H}(\omega) \underline{e} \quad \text{ainsi :} \quad \underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S}{E}$$

#### Gain d'un filtre

##### ► Amplitude de sortie et gain

Pour une pulsation  $\omega$  donnée, l'amplitude  $S$  de la sortie vérifie :  $S = |\underline{H}(\omega)| \cdot E$ .

On définit alors le **gain du filtre** :  $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| \Rightarrow S = G(\omega)E$

On définit également le **gain en décibel** :  $G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) \Leftrightarrow G = 10^{G_{dB}/20}$

##### ► Amplification ou atténuation ?

Si  $G_{dB} > 0 \text{ dB} \Leftrightarrow G > 1 \Leftrightarrow S > E$  : il y a donc eu **amplification**.

Si  $G_{dB} < 0 \text{ dB} \Leftrightarrow G < 1 \Leftrightarrow S < E$  : il y a donc eu **atténuation**.

Suivant la fréquence imposée et la nature du filtre, on peut observer soit une amplification soit une atténuation.

#### Exemple

Nous avons vu que l'amortisseur de voiture (OSC2 ex3) pouvait amplifier les oscillations de la route lorsque la fréquence d'excitation (liée à la vitesse du véhicule) se rapprochait de la fréquence de résonance, ou au contraire les atténuer si la fréquence d'excitation était suffisamment grande.

## Déphasage de la sortie par rapport à l'entrée

Pour déterminer la phase initiale  $\varphi_s$  de la sortie connaissant celle de l'entrée, il suffit de pouvoir déterminer le déphasage  $\Delta\varphi_{s/e} = \varphi_s - \varphi_e$ . Pour cela, connaissant la fonction de transfert à la pulsation  $\omega$ , il suffit de passer à l'argument :

$$\Delta\varphi_{s/e} = \arg \underline{H}$$

## A.3 Filtrage d'un signal périodique

Pour un filtre donné dont on connaît le gain  $G(\omega)$  et le déphasage  $\Delta\varphi_{s/e}(\omega)$ , on peut en déduire d'après le principe de superposition que si on superpose en entrée deux sinusoïdes :

$$e_A(t) = E_A \cos(\omega_A t + \varphi_{eA}) \quad \text{et} \quad e_B(t) = E_B \cos(\omega_B t + \varphi_{eB})$$

alors, nous observons en sortie également la superposition de deux sinusoïdes :

$$s_A(t) = S_A \cos(\omega_A t + \varphi_{sA}) \quad \text{et} \quad s_B(t) = S_B \cos(\omega_B t + \varphi_{sB})$$

$$\text{telles que : } \begin{cases} S_A = G(\omega_A)E_A \\ \varphi_{sA} = \varphi_{eA} + \Delta\varphi_{s/e}(\omega_A) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_B = G(\omega_B)E_B \\ \varphi_{sB} = \varphi_{eB} + \Delta\varphi_{s/e}(\omega_B) \end{cases}$$

## ► Quelles sont les fréquences observables dans le spectre de sortie ?

Bien entendu, on peut aisément généraliser l'encadré précédent à une superposition de plus de deux entrées sinusoïdales.

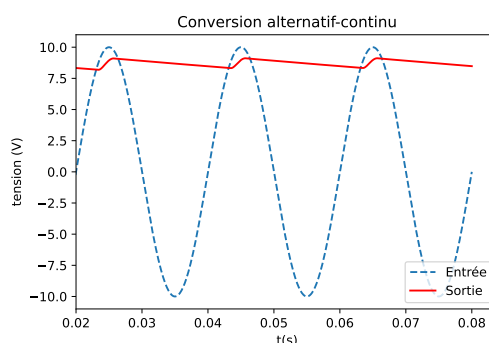
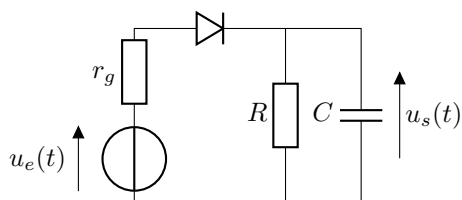
Pour un filtre linéaire, les fréquences observées dans le spectre du signal de sortie sont nécessairement présentes dans le spectre du signal d'entrée.

## ► Caractère non linéaire d'un filtre

Un système pourra être qualifié de **non-linéaire** si il ne satisfait pas la définition d'un filtre linéaire (voir paragraphe A.1). Un tel filtre ne respectera donc pas le principe de superposition. La propriété ci-dessus n'est donc pas valable et il apparaîtra ainsi dans le spectre de sortie des nouvelles fréquences qui étaient pourtant absentes dans le spectre d'entrée.

## Exemple

Exemple du redresseur mono-alternance avec capacité de «lissage» permettant d'effectuer la conversion alternatif-continu :



La tension d'entrée  $u_e(t)$  (tension sinusoïdale que l'on souhaite convertir en une tension  $u_s(t)$  quasi-constante) ne comporte que la fréquence  $f = 50$  Hz dans son spectre. La tension de sortie  $u_s(t)$  observée (aux bornes du condensateur) est périodique de fréquence  $f$  mais manifestement non-sinusoïdale et donc comporte nécessairement dans son spectre des harmoniques de fréquences  $2f, 3f, \dots$  qui n'étaient pourtant pas présentes dans le spectre d'entrée ! Une composante continue est même apparue dans le signal (harmonique de fréquence nulle). Cet enrichissement spectral est caractéristique d'une non-linéarité du filtre, non-linéarité due à la diode dont la relation courant-tension n'est pas linéaire !

Dans toute la suite du chapitre, on ne s'intéressera qu'à des **filtres linéaires**.

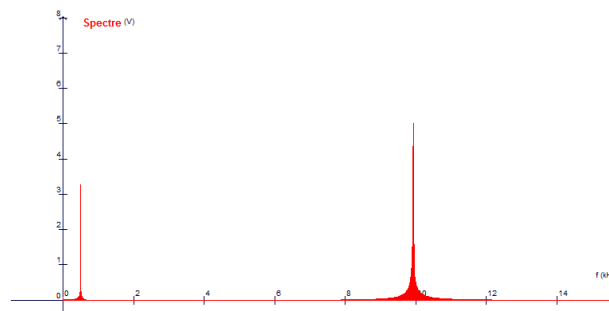
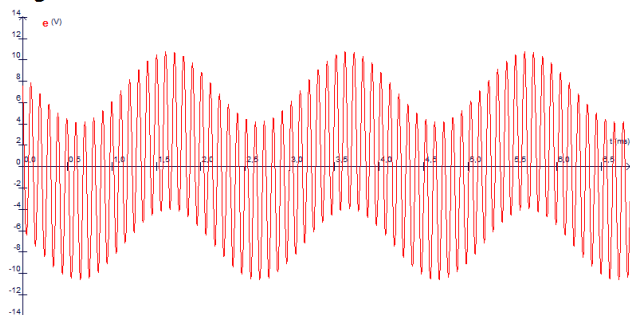
## Expérience

On s'intéresse au filtrage d'une superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquences respectives  $f_A = 500$  Hz et  $f_B = 10$  kHz.

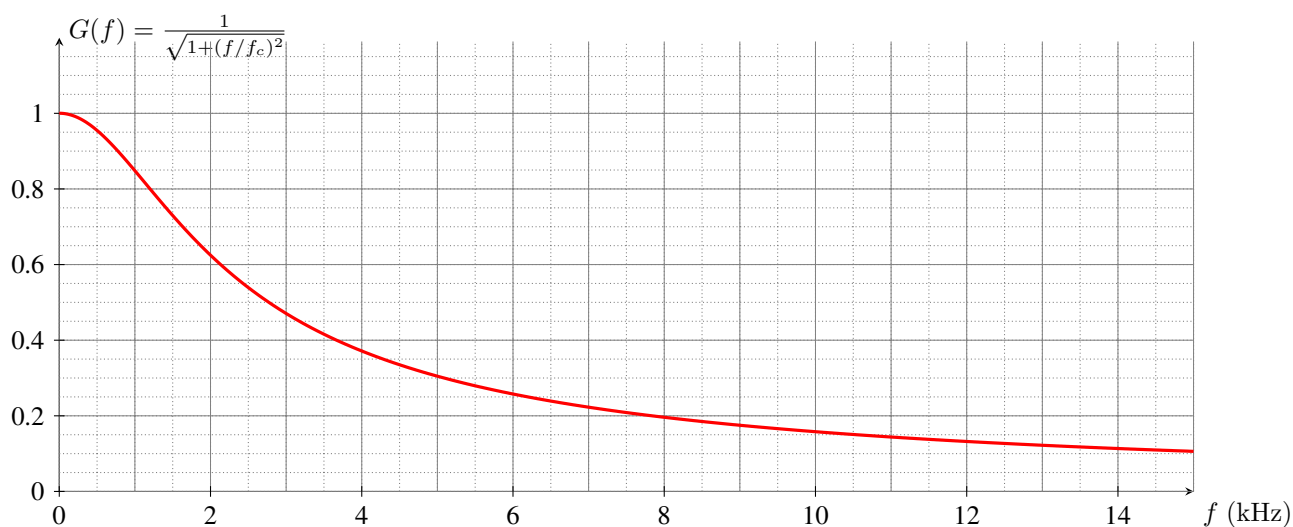
Des filtres RC seront employés dans cet exemple, leurs fonctions de transfert seront étudiées plus tard. Pour l'instant, admettons les courbes des gains données ci-après.

## ► Filtrage passe-bas

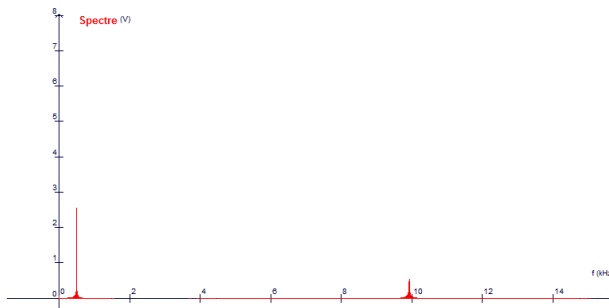
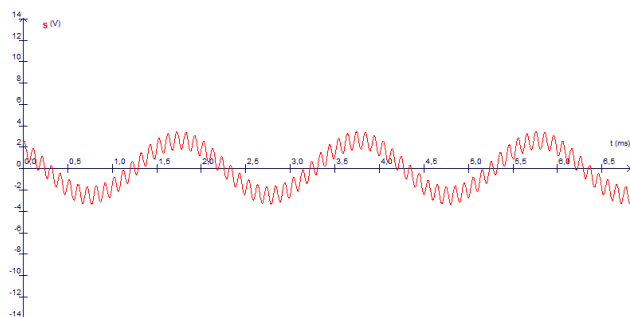
## Signal d'entrée



On filtre ce signal à l'aide d'un filtre RC passe-bas, avec  $R = 100$  k $\Omega$  et  $C = 1$  nF. Nous verrons que le gain peut s'écrire sous la forme  $G(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_c)^2}}$ , où la constante  $f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 1,6$  kHz est appelée fréquence de coupure. Voici la courbe de gain correspondante :



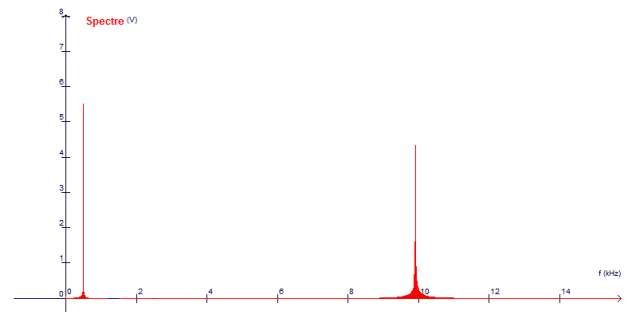
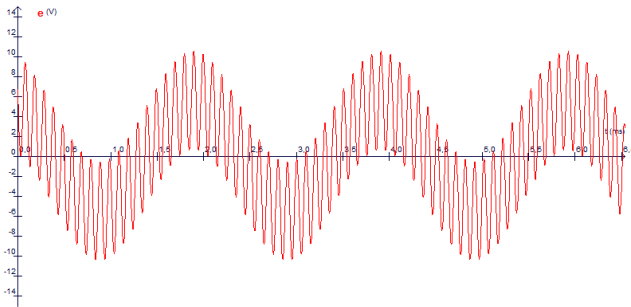
## Signal de sortie



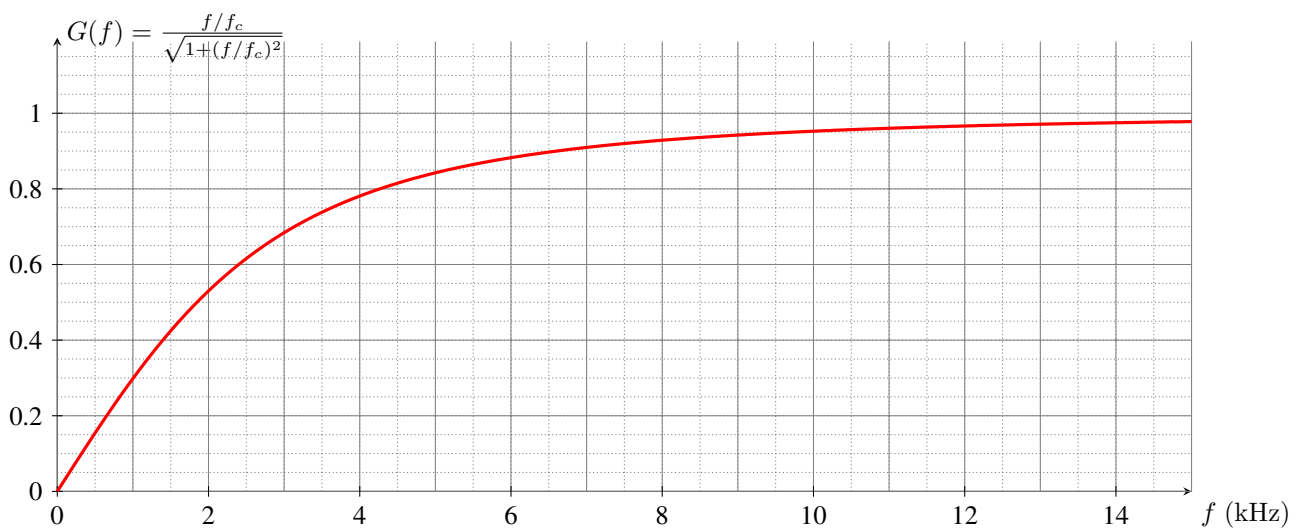
On perçoit aussi bien dans la représentation fréquentielle que temporelle des signaux d'entrée et de sortie que la composante de fréquence  $f_B$  a été clairement atténuée comparativement à la composante de fréquence  $f_A$  légèrement atténuée. En effet, par lecture graphique,  $G(f_A) = 0,96$ , alors que  $G(f_B) = 0,16$ .

► Filtrage passe-haut

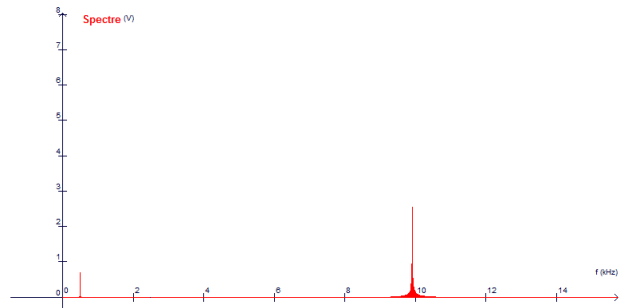
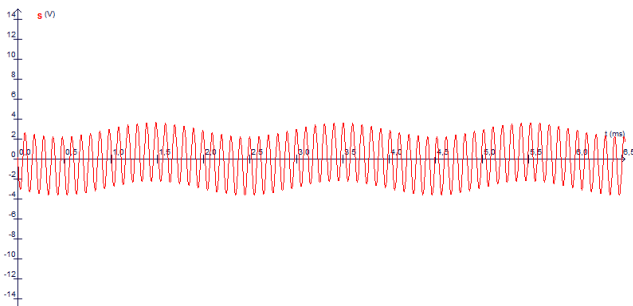
Signal d'entrée



On filtre ce signal à l'aide d'un filtre RC passe-haut, avec  $R = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C = 0,5 \text{ nF}$ . Nous verrons que le gain peut s'écrire sous la forme  $G(f) = \frac{f/f_c}{\sqrt{1+(f/f_c)^2}}$ , où la constante  $f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 3,2 \text{ kHz}$  est appelée fréquence de coupure. Voici la courbe de gain correspondante :



Signal de sortie



On perçoit aussi bien dans la représentation fréquentielle que temporelle des signaux d'entrée et de sortie que la composante de fréquence  $f_A$  est clairement atténuée comparativement à la composante de fréquence  $f_B$  légèrement atténuée. En effet, par lecture graphique,  $G(f_A) = 0,14$ , alors que  $G(f_B) = 0,94$ .

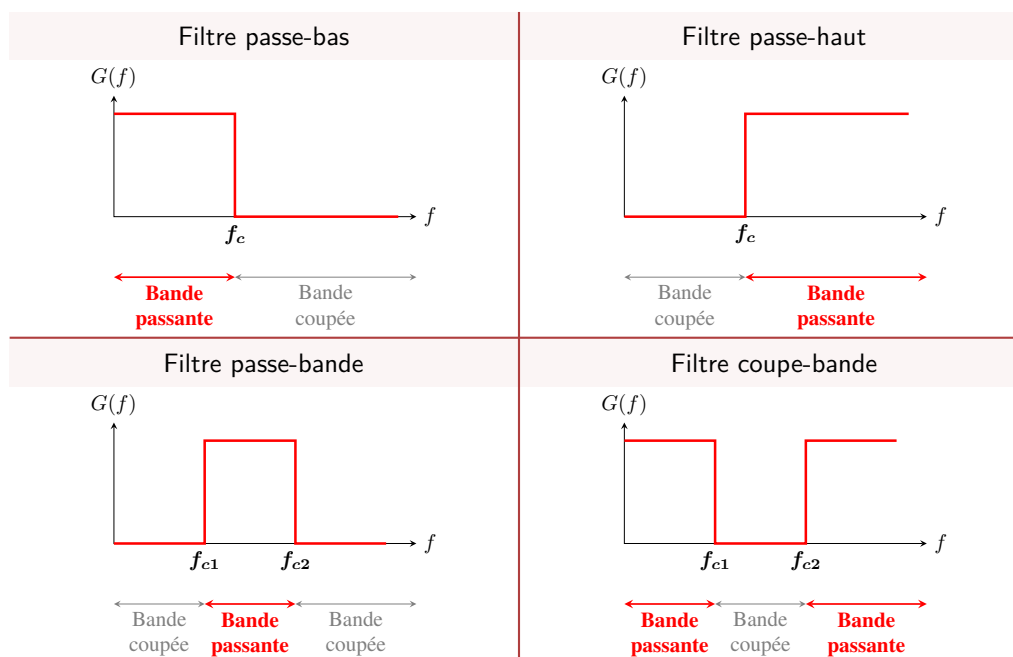
Généralisation : filtrage d'un signal périodique

On sait ainsi grâce à la fonction de transfert comment est modifié le spectre d'un signal périodique !  
 La connaissance de la fonction de transfert harmonique  $\underline{H}(\omega)$  permet de déterminer le gain et le déphasage appliqués par le filtre à chaque harmonique du signal d'entrée. Puis, on utilise le principe de superposition pour en déduire le signal de sortie.

## A.4 Nature et bande passante d'un filtre

### a. Différents types de filtres

Quand on souhaite modifier le spectre d'un signal pour privilégier certaines bandes de fréquences par rapport à d'autres, on souhaiterait idéalement que les courbes de gain soient de ce type :



Et accessoirement, on souhaiterait que les courbes de déphasage soient «plates», au moins dans la bande passante (ainsi, tout se passe comme si nous n'avions laissé «passer» que les composantes sinusoïdales du signal d'entrée incluses dans la bande passante sans avoir modifié leurs amplitudes ou phases initiales relativement les unes par rapport aux autres).

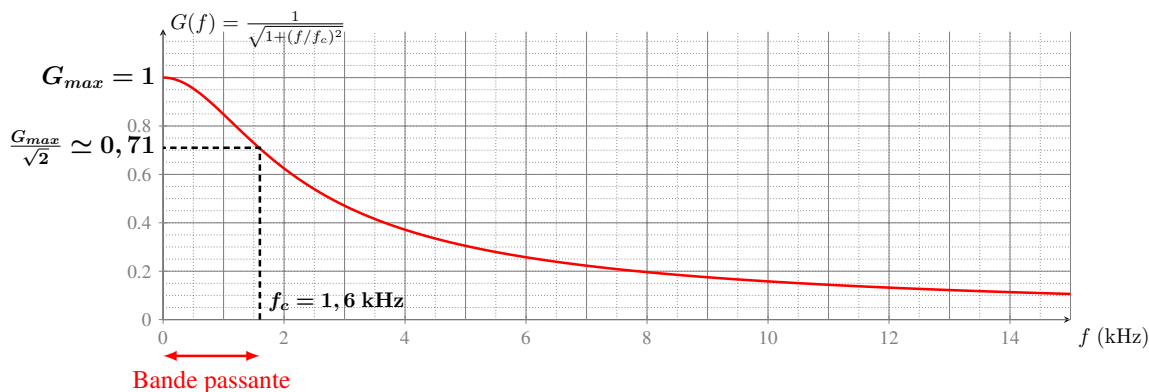
### b. Écart à l'idéalité : fréquence de coupure à -3dB

En réalité, les filtres que nous serons capables de concevoir ne seront pas idéaux car les courbes de gain ne pourront pas présenter des allures aussi abruptes que celles ci-dessus. On souhaite néanmoins préserver la notion utile de **bande passante**. On choisit alors de la définir comme étant l'intervalle de fréquence vérifiant la condition suivante :

$$\text{Une fréquence } f \text{ appartient à la } \mathbf{\text{bande passante}} \text{ du filtre si : } G(f) \geq \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}; \Leftrightarrow G_{dB}(f) \geq G_{dB,max} - 3\text{dB}$$

(R) En effet,  $20 \log \sqrt{2} = 3 \dots$

Par exemple, pour le filtre RC passe-bas employé dans l'expérience du paragraphe précédent, on peut identifier graphiquement la bande passante ainsi :



(R) Autre écart à l'idéalité : les composantes sinusoïdales du signal d'entrée appartenant à la bande passante peuvent subir des déphasages différents les unes par rapport aux autres comme nous le verrons dans différents exemples. Toutefois, c'est rarement gênant en pratique ...

# B Diagramme de Bode

## B.1 Définition

Comme cela a déjà été expliqué, pour caractériser la réponse d'un filtre à une entrée sinusoïdale, il suffit d'étudier son gain et son argument. En pratique, plutôt que le gain, on préférera étudier son gain en décibel qui permettra une interprétation aisée du diagramme notamment parce que son usage ira de concert avec l'usage d'une échelle logarithmique en fréquence (voir paragraphe suivant).

### Définition

Le diagramme de Bode d'un filtre fournit la représentation graphique de  $G_{dB} = 20 \log |H|$  et  $\varphi = \arg(H)$  en fonction de  $\log x = \log \frac{\omega}{\omega_{ref}}$  où  $\omega_{ref}$  est une pulsation de référence permettant d'adimensionner l'argument du logarithme.

**R**  $x$  est souvent appelé pulsation réduite.

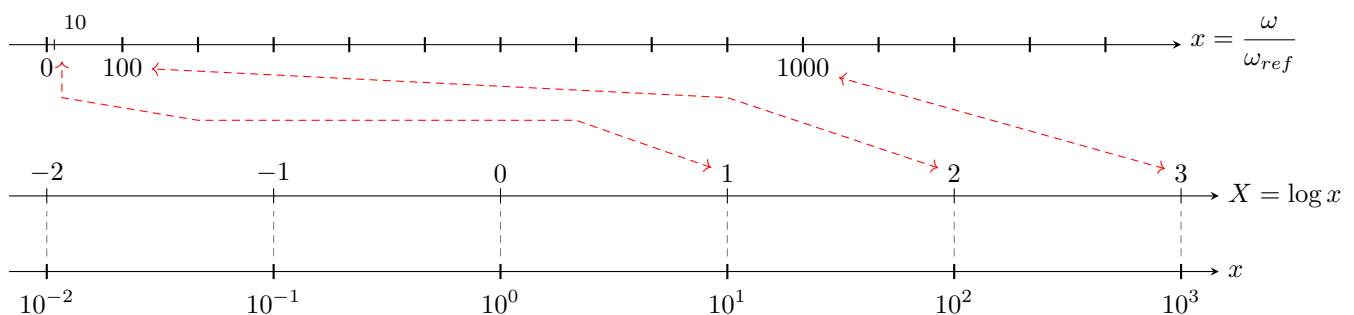
## B.2 Utilisation d'échelles logarithmiques

Prenons l'exemple de l'audible en choisissant une **échelle linéaire**  $1 \text{ kHz} \leftrightarrow 1 \text{ cm}$  de sorte que le spectre de l'audible [20 Hz, 20 kHz] impose un axe horizontal de fréquence d'une vingtaine de centimètres de long. Voici alors le problème qui se pose : les graves (de 20 Hz à 400 Hz) occuperont une largeur de 0,38 cm, les mediums (de 400 Hz à 2 kHz) occuperont une largeur de 1,6 cm et les aigus (de 2 kHz à 20 kHz) occuperont une largeur de 18 cm ! Bref, la répartition n'est pas équitable.

**Une échelle linéaire classique n'est donc pas satisfaisante pour couvrir l'étude d'une large gamme de fréquence.** Notamment, il sera compliqué de visualiser graphiquement l'effet d'un filtre sur les plus basses fréquences.

On préférera ainsi utiliser une **échelle logarithmique**. En effet, la fonction logarithme (base 10 en l'occurrence) permet d'«adoucir» les changements d'ordre de grandeur. Notamment, multiplier une valeur donnée de  $x$  par 10 sur une échelle linéaire revient à effectuer un saut d'une unité en échelle logarithmique ( $\log(10x) = \log(x) + 1$ ).

Le premier axe ci-dessous représente une échelle linéaire en  $x$ , le deuxième représente une échelle linéaire en  $X = \log x$ , alors que le troisième représente une échelle logarithmique en  $x$  :

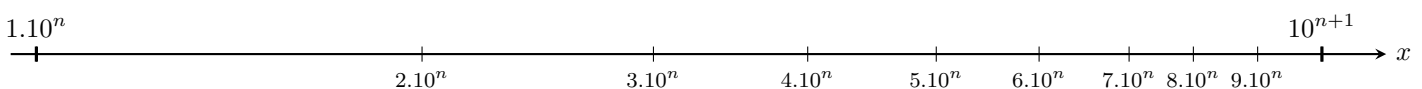


Précisons ce qu'est une **décade** : il s'agit d'un intervalle de type  $[x, 10x]$ .

### Exemple

$[10^2, 10^3]$  est une décade.  $[3 \cdot 10^{-2}, 3 \cdot 10^{-1}]$  est une décade également.

Au sein d'une décade de type  $[10^n, 10^{n+1}]$ , voici la répartition des valeurs  $a \cdot 10^n$  pour  $a \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$  en échelle logarithmique :



### B.3 Exemple

Illustrons à nouveau avec l'exemple du circuit RC série avec une tension de sortie prise aux bornes du condensateur. Nous avons vu que la fonction de transfert s'écrivait :  $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$ .

#### ► Quelle pulsation de référence choisir ?

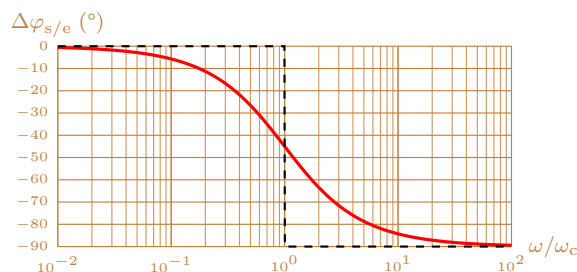
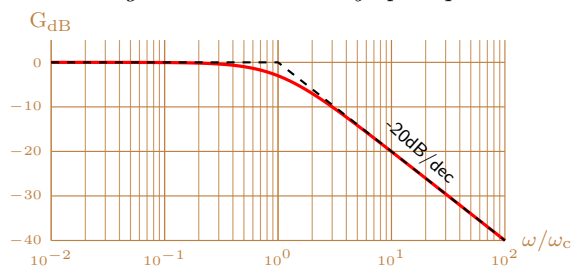
La fonction de transfert pourrait s'écrire simplement sous la forme  $\underline{H} = \frac{1}{1 + jx}$  en définissant  $x = \omega\tau$ .

La pulsation de référence à choisir instinctivement serait donc  $\frac{1}{\tau}$ .

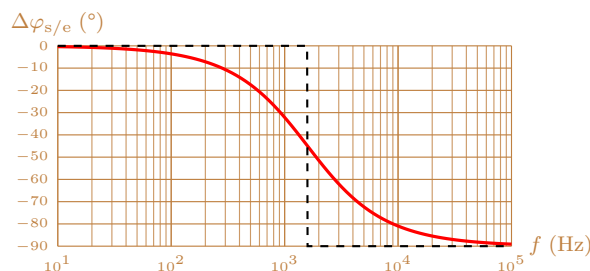
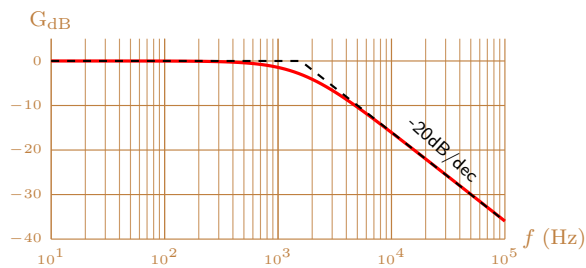
Si on y regarde de plus près, le gain  $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , de valeur maximale  $G_{max} = G(x=0) = 1$ , prend la valeur  $\frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$  pour  $x = 1$ . Ainsi, cette pulsation de référence correspond finalement à l'unique pulsation de coupure de ce filtre  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  et donc  $x = \frac{\omega}{\omega_c}$  pour cet exemple.

#### ► Diagramme de Bode

Voici l'allure du diagramme de Bode pour cette fonction de transfert. Les tracés en pointillés représentent les comportements du filtre à très haute ou très basse fréquence, aussi appelés comportements asymptotiques, et représentent ainsi le *diagramme de Bode asymptotique*.



On peut aussi représenter  $f$  ou  $\omega$  en abscisse plutôt que  $x$  :



Comparons à la courbe  $G(f)$  pour le même filtre présentée dans l'expérience du paragraphe A.3b) (page 5) : on apprécie le confort de lecture et d'interprétation apporté par l'usage d'échelles logarithmiques.

On peut par exemple retrouver facilement la valeur de fréquence de coupure par lecture graphique en identifiant d'abord la valeur de  $G_{dB,max}$  (0 dB ici) et en identifiant la fréquence pour laquelle le gain vaut  $G_{dB,max} - 3$  dB.

#### ► Interprétation de la pente d'un comportement asymptotique

Pour  $x \gg 1$  (cas très haute fréquence), on a :  $\underline{H} \simeq \frac{1}{jx} \Rightarrow G \simeq \frac{1}{x} \Rightarrow G_{dB} = -20 \log x$ .

Ainsi,  $G_{dB}$  s'écrit comme une fonction affine de la variable  $\log x$  et de coefficient directeur  $-20$ . D'où le comportement de type affine effectivement observé sur le diagramme ci-dessus à très haute fréquence.

Plus précisément, on sait que ce « $-20$ » représente le taux de variation :  $\frac{G_{dB}(x_2) - G_{dB}(x_1)}{\log x_2 - \log x_1} = -20$ .

Par exemple, pour une décade,  $x_2 = 10x_1$  donc  $\log x_2 = \log x_1 + 1$ . Ainsi, en passant d'un bout à l'autre d'une décade, la variation de gain  $\Delta G_{dB}$  est donc :  $\frac{\Delta G_{dB}}{1} = -20$ .

Autrement dit, le gain chute de 20 décibels toutes les décades. Donc on parlera de **pente égale à  $-20$  dB/décade**.

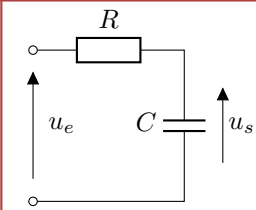
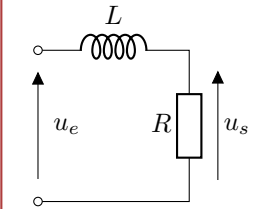
**On peut généraliser aisément** : si pour un filtre donné, on montre que dans une certaine gamme de fréquence,  $G_{dB} \simeq N \log x + \text{constante}$ , alors on dira que la pente est égale à  $N$  dB/dec.

## C Exemples de filtre

### C.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

#### a. Exemples des circuits RC et RL

##### ► Prévision de la nature du filtre

Circuit	TBF	THF
		
		

Ainsi, ces deux filtres atténuent les hautes fréquences : il s'agit donc bien de filtres passe-bas.

##### ► Fonction de transfert

Circuit	Fonction de transfert $\underline{H}$	Pulsation de coupure $\omega_c$

Ces deux fonctions de transfert peuvent donc toutes deux s'écrire sous la forme :  $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Inspirons-nous en pour définir la forme canonique d'une filtre passe-bas d'ordre 1.

**b. Forme canonique de la fonction de transfert, gain et déphasage**

Pour un filtre passe-bas d'ordre 1, on choisira naturellement

$$x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Forme canonique de $\underline{H}$	Gain $G$	Déphasage $\Delta\varphi_{s/e}$

**c. Diagramme de Bode**

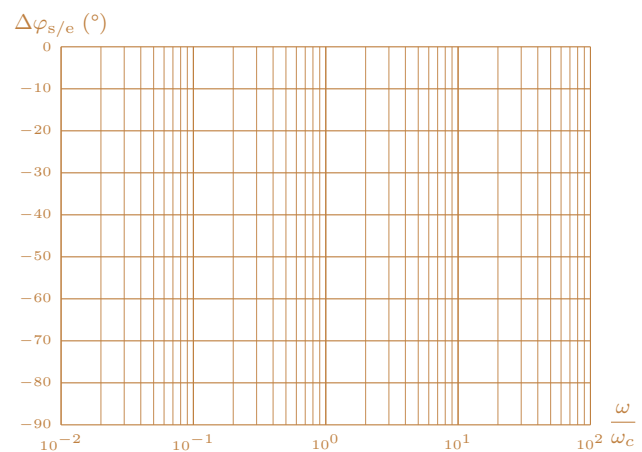
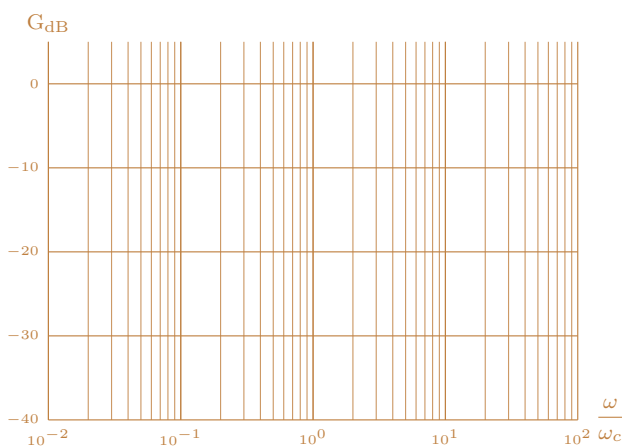
Plaçons nous dans le cas  $H_0 > 0$ .

**► Étude des comportements asymptotiques et du cas  $x = 1$** 

	TBF ( $x \ll 1$ )	$x = 1$	THF ( $x \gg 1$ )
$\underline{H}$			
$G$			
$G_{dB}$			
$\Delta\varphi_{s/e}$			

**► Tracé du diagramme de Bode**

Traisons le cas simple  $H_0 = 1$  (cas du circuit RC ou RL série).





## C.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

### a. Exemples des circuits RC et RL

#### ► Prédiction de la nature du filtre

Circuit	TBF	THF

Ainsi, ces deux filtres atténuent les basses fréquences : il s'agit donc bien de filtres passe-haut.

#### ► Fonction de transfert

Circuit	Fonction de transfert $\underline{H}$	Pulsation de coupure $\omega_c$
<p>Circuit RC série</p>		
<p>Circuit RL série</p>		

Ces deux fonctions de transfert peuvent donc toutes deux s'écrire sous la forme :  $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega/\omega_c}}$

Inspirons-nous en pour définir la forme canonique d'une filtre passe-haut d'ordre 1.

**b. Forme canonique de la fonction de transfert, gain et déphasage**

Pour un filtre passe-haut d'ordre 1, on choisira naturellement

$$x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Forme canonique de $\underline{H}$	Gain $G$	Déphasage $\Delta\varphi_{s/e}$

**c. Diagramme de Bode**

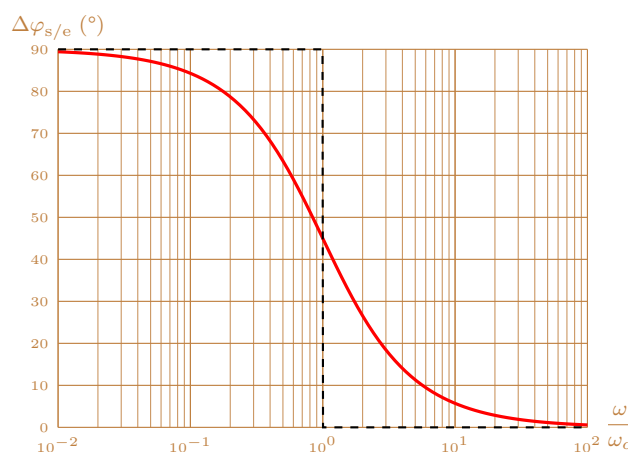
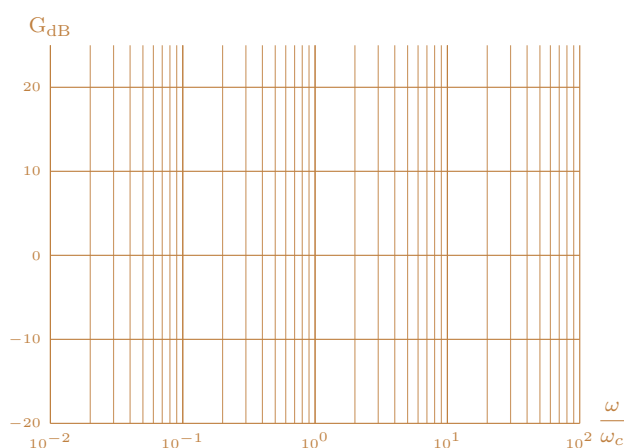
Plaçons nous dans le cas  $H_0 > 0$ .

**► Étude des comportements asymptotiques et du cas  $x = 1$** 

	TBF ( $x \ll 1$ )	$x = 1$	THF ( $x \gg 1$ )
$\underline{H}$			
$G$			
$G_{dB}$			
$\Delta\varphi_{s/e}$			

**► Tracé du diagramme de Bode**

Traitons le cas  $H_0 = 10$  par exemple.



### C.3 Filtre passe-bande d'ordre 2

#### a. Exemple du circuit RLC série

##### ► Prédiction de la nature du filtre

Circuit	TBF	THF

Ainsi, ce filtre atténue les basses et les hautes fréquences : il s'agit donc bien d'un filtre passe-bande.

##### ► Fonction de transfert

Circuit	Fonction de transfert $\underline{H}$
<p>Rappel :</p> $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$	

Inspirons-nous de cet exemple pour définir la forme canonique d'une filtre passe-bande d'ordre 2.

#### b. Forme canonique de la fonction de transfert, gain et déphasage

Pour un filtre passe-bande d'ordre 2, on choisira naturellement  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Forme canonique de $\underline{H}$	Gain $G$	Déphasage $\Delta\varphi_{s/e}$

L'étude de la résonance en intensité du circuit RLC série (ou de l'oscillateur masse-ressort) nous a déjà fourni les pulsations de coupure liées au phénomène de résonance (obtenues en résolvant  $G(x) = G_{max}/\sqrt{2}$ ) :

$$\begin{cases} \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{2Q} \left( \sqrt{1 + 4Q^2} - 1 \right) \\ \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2Q} \left( \sqrt{1 + 4Q^2} + 1 \right) \end{cases} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \quad (\text{largeur de la bande passante})$$

Le filtre passe-bande est donc d'autant plus **sélectif** (*bande passante étroite*) que son facteur de qualité est grand.

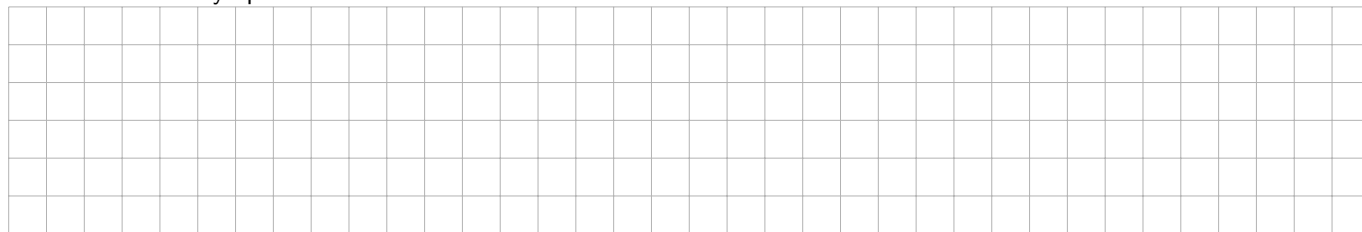
**c. Diagramme de Bode**

Plaçons nous dans le cas  $H_0 > 0$ .

► **Étude des comportements asymptotiques et du cas  $x = 1$**

	TBF ( $x \ll 1$ )	$x = 1$	THF ( $x \gg 1$ )
$\underline{H}$			
$G$			
$G_{dB}$			
$\Delta\varphi_{s/e}$			

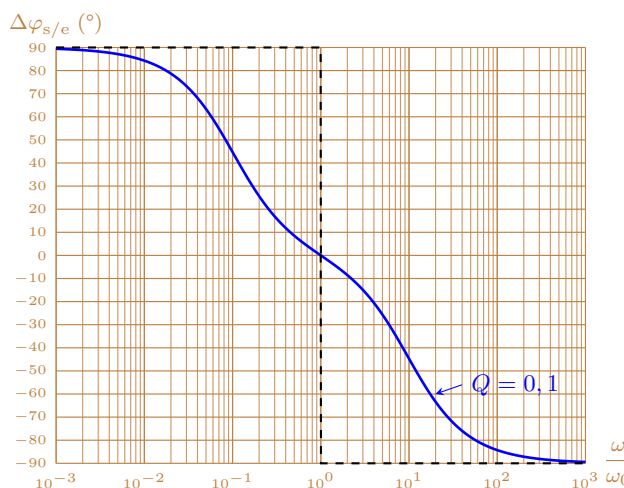
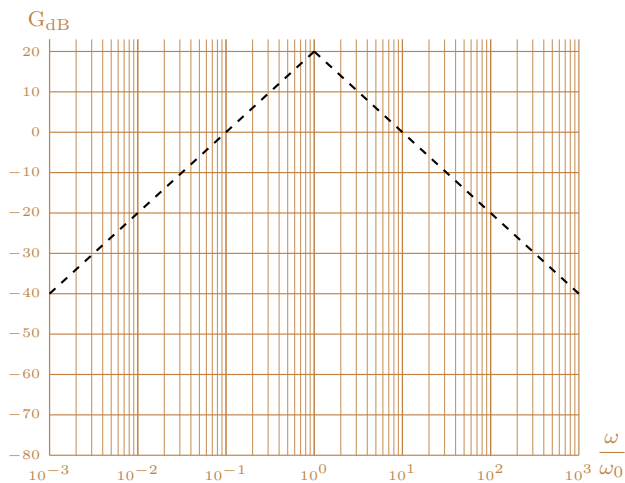
Intersection des asymptotes :



► **Tracé du diagramme de Bode**

On considère par exemple que  $H_0 = 1$ .

On s'intéresse aux cas  $Q = 0,1$  et  $Q = 10$  afin de percevoir l'influence du facteur de qualité.



**(R)** Dans le cas  $Q = 0,1$ , l'allure graphique du déphasage paraît étrange, non ?

On peut montrer que si  $Q < \frac{1}{2}$ ,  $\underline{H} = \alpha H_0 \frac{1}{1+jax} \frac{1}{1+\frac{1}{jbx}}$  avec  $\alpha = 1 + \frac{b}{a}$ ,  $a + b = \frac{1}{Q}$  et  $ab = 1$ .

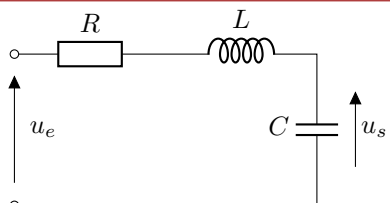
Ainsi,  $\underline{H} = \alpha H_0 \underline{H}_1 \underline{H}_2$ , où  $\underline{H}_1$  est la fonction de transfert d'un filtre passe-bas hypothétique d'ordre 1, et  $\underline{H}_2$  est la fonction de transfert d'un filtre passe-haut hypothétique d'ordre 1. On peut donc écrire :  $G_{dB} = 20 \log(\alpha H_0) + G_{dB,1} + G_{dB,2}$  et  $\Delta\varphi_{s/e} = \Delta\varphi_{s/e,1} + \Delta\varphi_{s/e,2}$ . C'est pourquoi on distingue sur le diagramme de Bode l'action déjà étudiée de chacun de ces deux filtres fictifs sur le signal d'entrée en « additionnant leurs effets ». Le passe-bas est de pulsation de coupure  $\frac{\omega_0}{a}$  alors que le passe-haut est de pulsation de coupure  $\frac{\omega_0}{b}$ .

Les pulsations réduites correspondantes sont donc  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{b}$ . Par exemple, pour  $Q = 0,1$ , on peut établir que  $\alpha \simeq 1$ , et de plus  $a \simeq 0,1$  et  $b \simeq 10$ . On retrouve effectivement sur le tracé (cas  $Q = 0,1$ ) ces valeurs particulières de pulsations réduites...

## C.4 Filtre passe-bas d'ordre 2

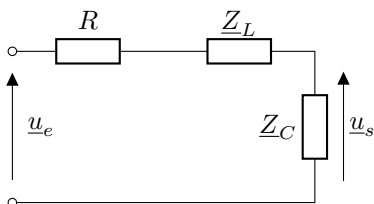
### a. Exemple du circuit RLC série

#### ► Prédiction de la nature du filtre

Circuit	TBF	THF
		

Ainsi, ce filtre atténue seulement les hautes fréquences : il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas.

#### ► Fonction de transfert

Circuit	Fonction de transfert $\underline{H}$
 <p>Rappel :</p> $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$	

### b. Forme canonique de la fonction de transfert, gain et déphasage

Pour un filtre passe-bas d'ordre 2, on choisira naturellement

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} .$$

Forme canonique de $\underline{H}$	Gain $G$	Déphasage $\Delta\varphi_{s/e}$

D'après l'étude de la résonance en charge du circuit RLC série, on a déjà établi que si  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$ , on observera un **phénomène de résonance** à la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ . Mais puisqu'on souhaite concevoir un filtre passe-bas, **on cherche plutôt à éviter ce phénomène de résonance** qui introduit un comportement passe-bande non-souhaité et localisé au voisinage de  $x_r \simeq 1$  (voir courbe de gain à la page suivante).

Ainsi, dans le cas où  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  (*pas de résonance*), le gain maximal est  $|H_0|$ . La **pulsation de coupure** du filtre vérifie donc  $G(x) = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}}$ . La résolution est fastidieuse et n'a pas un grand intérêt en soi. On admettra que  $\omega_c$  **diminue lorsque  $Q$  diminue** et on se contentera de déterminer graphiquement sa valeur. Néanmoins, à la limite d'existence de la résonance, la résolution est très simple (*faites-le!*) et aboutit à  $\omega_c = \omega_0$ , pour  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**c. Diagramme de Bode**

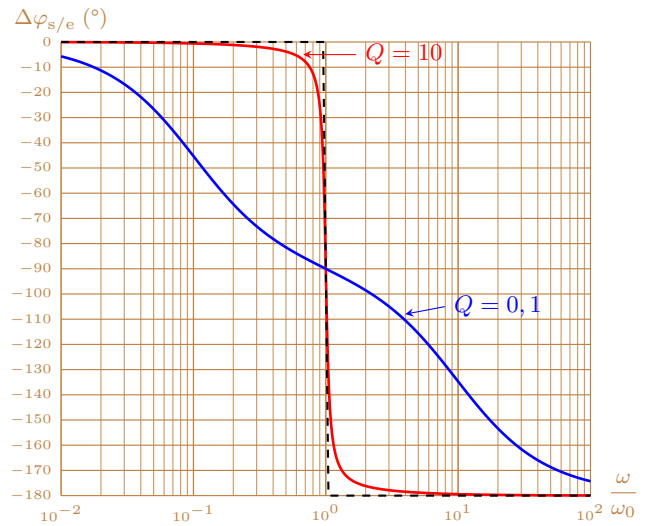
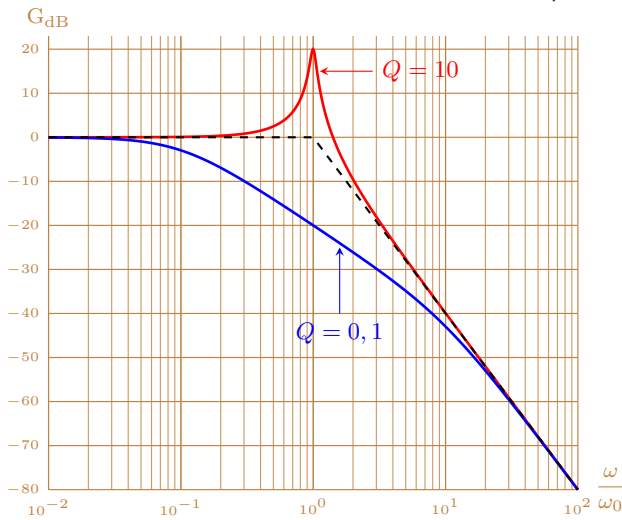
Plaçons nous dans le cas  $H_0 > 0$ .

► **Étude des comportements asymptotiques et du cas  $x = 1$**

	TBF ( $x \ll 1$ )	$x = 1$	THF ( $x \gg 1$ )
$H$			
$G$			
$G_{dB}$			
$\Delta\varphi_{s/e}$			

► **Tracé du diagramme de Bode**

Avec  $H_0 = 1$ , représentons les cas  $Q = 0, 1$ ,  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $Q = 10$  afin de percevoir l'influence du facteur de qualité.



**(R)** On retrouve la même étrangeté graphique que dans le cas du filtre passe-bande pour un faible facteur de qualité. On peut montrer que si  $Q < \frac{1}{2}$ ,  $H = H_0 \frac{1}{1+jax} \frac{1}{1+jbx}$  avec  $a+b = \frac{1}{Q}$  et  $ab = 1$ . On peut donc encore une fois « additionner les effets » de deux filtres hypothétiques, tous deux passe-bas ici : l'un de pulsation réduite de coupure  $\frac{1}{a}$ , et  $\frac{1}{b}$  pour l'autre. Par exemple, pour  $Q = 0,1$ , on peut établir que  $a \simeq 0,1$  et  $b \simeq 10$ . On retrouve effectivement sur le tracé ces valeurs particulières de pulsations réduites... Et cela explique également l'existence d'un comportement asymptotique intermédiaire à  $-20$  dB/dec correspondant au cas où la fréquence d'entrée appartient à la bande passante de l'un mais pas à celle de l'autre ...

# D Réalisation d'opérations à l'aide de filtres

## D.1 Comportement dérivateur d'un filtre

Pour qu'un système réalise une dérivation de l'entrée, il faut :  $s(t) = K \frac{de}{dt}$ , où  $K$  est une constante.

Cela implique :  $\underline{s} = K j \omega \underline{e} \Rightarrow \underline{H} = K j \omega = K' j x$  (où  $K' = K \omega_{ref}$ ).

Par conséquent :  $G_{dB} = 20 \log x + constante$  et  $\Delta\varphi_{s/e} = \frac{\pi}{2} + \begin{cases} \pm\pi & , \text{ si } K' < 0 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$

Un filtre se comporte comme un dérivateur dans un domaine de fréquence où le gain en décibel présente un aspect affine de pente +20dB/décade et où la sortie et l'entrée sont en quadrature de phase.

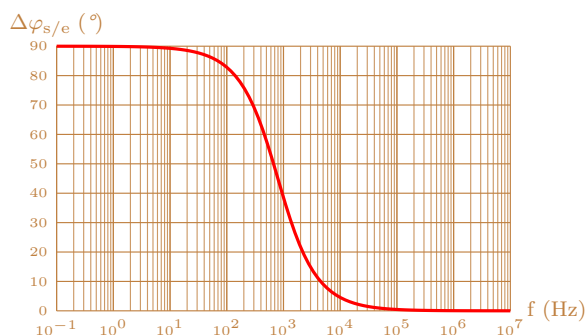
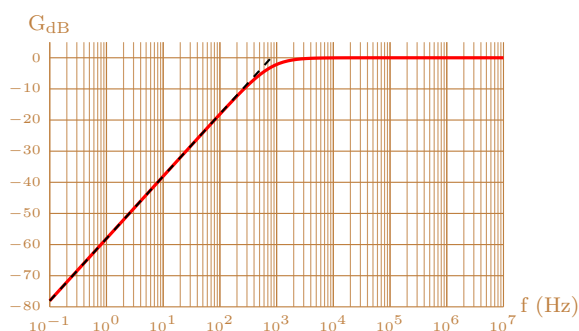
### Exemples

C'est le cas d'un filtre passe-haut d'ordre 1 à basse fréquence ( $f \ll f_c$ ) ou bien d'un filtre passe-bande à basse fréquence également ( $f \ll f_0$ ). Voir les diagrammes de Bode déjà établis dans la partie précédente.

- R** *Interprétation dans le domaine temporel*, par exemple dans le cas du circuit RC passe-haut :  $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{de}{dt}$ .  
 $S$  étant l'amplitude de  $s(t)$ , alors  $\frac{ds}{dt}$  est en ordre de grandeur égal à  $\frac{S}{T} = fS$ . De même, en ordre de grandeur :  $\frac{s}{\tau} \simeq \frac{S}{\tau} = 2\pi f_c S$ .  
 Il faut  $\frac{ds}{dt} \ll \frac{s}{\tau}$  afin que l'équation différentielle s'écrive approximativement :  $\frac{s}{\tau} = \frac{de}{dt} \Rightarrow s = \tau \frac{de}{dt}$  (comportement dérivateur).  
 Il faut donc  $f \ll 2\pi f_c$ , soit  $f \ll f_c$ . On retrouve donc bien la même condition.

### Expérience

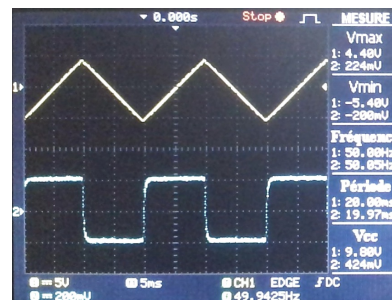
Employons par exemple un filtre RC passe-haut ( $R = 20 \text{ k}\Omega$  et  $C = 10 \text{ nF}$ ) de fréquence de coupure  $f_c \simeq 800 \text{ Hz}$ . Voici son diagramme de Bode :



### Observation du comportement dérivateur

Si on s'en tient à la courbe de gain, le comportement dérivateur pourra être observé jusqu'à environ 400 Hz. Essayons avec un signal d'entrée triangulaire de fréquence fondamentale  $f_1 = 50 \text{ Hz}$  sans composante continue. La dérivée d'une fonction affine par morceaux serait une « fonction constante par morceaux ». Autrement dit, la dérivée d'un signal triangulaire est un signal rectangulaire. C'est bien ce qui est observé !

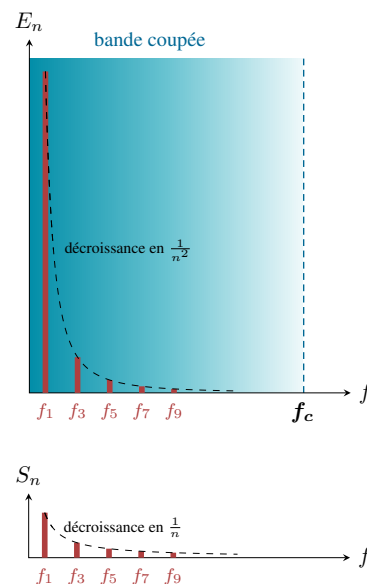
- R** Notons que l'amplitude crête-à-crête a fortement chuté, et c'est bien normal puisque le filtre a dû atténuer les composantes sinusoïdales pour effectuer la dérivation (voir courbe de gain).



Analysons un peu plus en détail. On rappelle que le signal triangulaire (en entrée ici) ne comporte que des harmoniques impaires d'amplitude  $\frac{A_1}{n}$ . Ainsi, les 7ème et 9ème harmoniques sont de fréquences respectives 350 Hz et 450 Hz et les harmoniques suivantes sont donc de fréquences trop élevées et ne seraient donc pas dérivées par le filtre (elle ne seraient d'ailleurs quasiment pas atténuées et éventuellement légèrement déphasées d'après le diagramme de Bode).

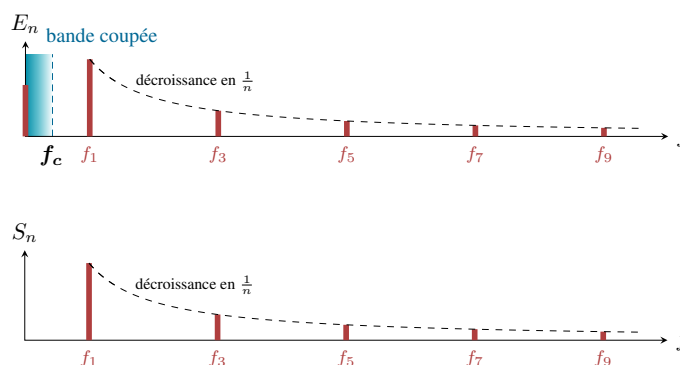
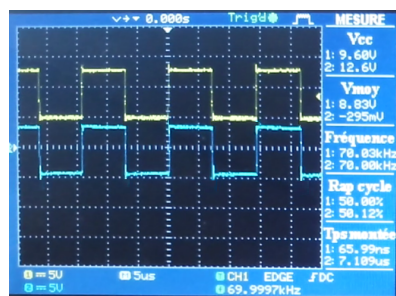
Pourtant, cela semble fonctionner quand même car ces harmoniques de rang supérieur ont un « poids » faible dans le spectre du signal puisque leurs amplitudes sont bien moindres que les harmoniques de rangs inférieurs.

Remarquons qu'en réalité, d'après la courbe de déphasage, le comportement dérivateur ne devrait être observé que jusqu'à environ 10 Hz. Pourtant la fondamentale est de fréquence supérieure à 10 Hz et donc les harmoniques aussi ! C'est probablement la raison pour laquelle le signal rectangulaire observé en sortie n'est pas parfaitement rectangulaire non plus (coins arrondis). Mais ça ne marche pas si mal que cela malgré tout.



### ► Application à la suppression d'une composante continue

Prenons désormais un signal d'entrée créneau de fréquence fondamentale  $f_1 = 70$  kHz avec composante continue. La fondamentale et les harmoniques ne sont pas situées dans le domaine fréquentiel où le comportement du filtre est dérivateur. Bien au contraire, d'après le diagramme de Bode, elles seront laissées « intactes » en sortie (pas d'atténuation ni amplification, pas de déphasage). Par contre la composante continue de fréquence nulle satisfait bien la condition  $f \ll f_c$  pour observer le comportement dérivateur. Et la dérivée d'une constante est égale à ... 0 ! D'où une composante continue nulle en sortie et un motif rectangulaire identique à celui d'entrée.



## D.2 Comportement intégrateur d'un filtre

Pour qu'un système puisse primitiver l'entrée, il faut que la sortie vérifie :  $\dot{s}(t) = K e(t)$ , où  $K$  est une constante. En effet, cette relation impose de primitiver  $e(t)$  pour obtenir  $s(t)$ .

Cela implique :  $j\omega \underline{s} = K \underline{e} \Rightarrow \underline{H} = \frac{K}{j\omega} = \frac{K'}{jx}$  (où  $K' = K\omega_{ref}$ ).

Par conséquent :  $G_{dB} = -20 \log x + \text{constante}$  et  $\Delta\varphi_{s/e} = -\frac{\pi}{2} + \begin{cases} \pm\pi & , \text{ si } K' < 0 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$

Un filtre se comporte comme un intégrateur dans un domaine de fréquence où le gain en décibel présente un aspect affine de pente -20dB/décade et où la sortie et l'entrée sont en quadrature de phase.

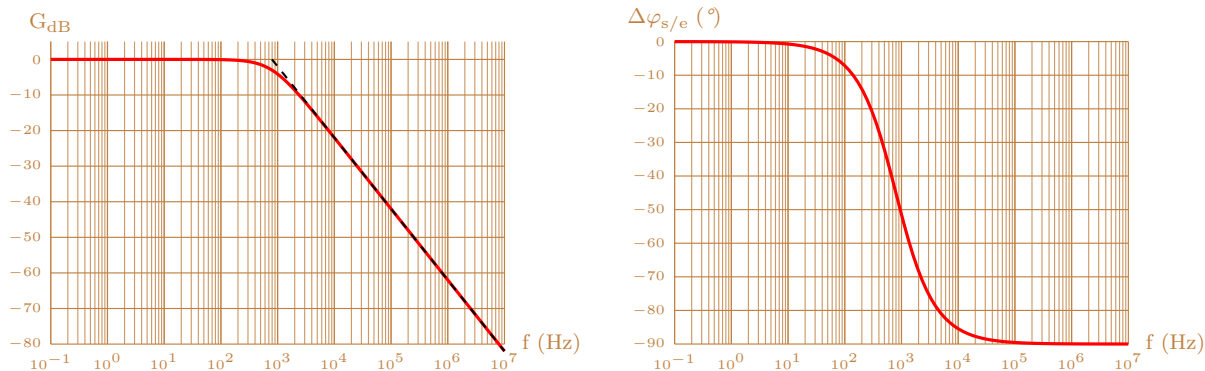
#### Exemples

C'est le cas d'un filtre passe-bas d'ordre 1 à haute fréquence ( $f \gg f_c$ ) ou bien d'un filtre passe-bande à haute fréquence également ( $f \gg f_0$ ). Voir les diagrammes de Bode déjà établis dans la partie précédente.

**(R)** *Interprétation dans le domaine temporel, par exemple dans le cas du circuit RC passe-bas :  $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{e}{\tau}$ .  
 $S$  étant l'amplitude de  $s(t)$ , alors  $\frac{ds}{dt}$  est en ordre de grandeur égal à  $\frac{S}{T} = fS$ . De même, en ordre de grandeur :  $\frac{s}{\tau} \simeq \frac{S}{\tau} = 2\pi f_c S$ .  
 Il faut  $\frac{ds}{dt} \gg \frac{s}{\tau}$  afin que l'équation différentielle s'écrive approximativement :  $\frac{ds}{dt} = \frac{e}{\tau}$  (comportement intégrateur). Il faut donc  $f \gg 2\pi f_c$ , soit  $f \gg f_c$ . On retrouve donc bien la même condition.*

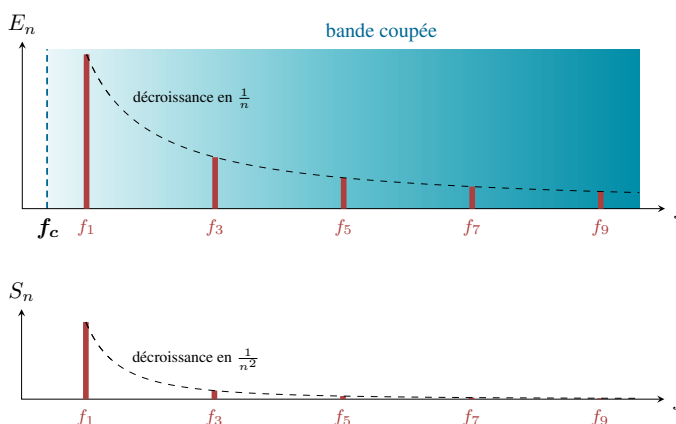
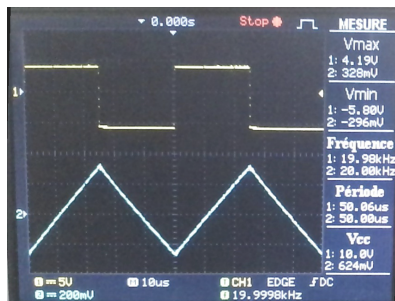
**Expérience**

Employons par exemple un filtre RC passe-bas ( $R = 20 \text{ k}\Omega$  et  $C = 10 \text{ nF}$ ) de fréquence de coupure  $f_c \simeq 800 \text{ Hz}$ . Voici son diagramme de Bode :



**Observation du comportement intégrateur**

Si on s'en tient à la courbe de gain, le comportement intégrateur pourra être observé à partir d'environ 2 kHz. Essayons avec un signal d'entrée rectangulaire de fréquence fondamentale  $f_1 = 20 \text{ kHz}$  sans composante continue. La primitive d'une « fonction constante par morceaux » serait une fonction affine par morceaux. Autrement dit, l'intégration d'un signal rectangulaire fournit un signal triangulaire. C'est bien ce qui est observé !



**(R)** *Notons que l'amplitude crête-à-crête a fortement chuté, et c'est bien normal puisque le filtre a dû atténuer les composantes sinusoïdales pour effectuer l'intégration (voir courbe de gain).*

En réalité, d'après la courbe de déphasage, le comportement intégrateur ne devrait être observé qu'à partir d'environ 80 kHz. Or, la fondamentale est à 20 kHz ! C'est probablement la raison pour laquelle le signal triangulaire observé en sortie n'est pas parfaitement triangulaire non plus (au niveau des « pointes » notamment). Mais ça ne marche pas si mal que cela malgré tout...

**D.3 Comportement moyenneur**

Si l'entrée  $e(t)$  est périodique, rappelons que l'on peut distinguer dans son spectre **une composante continue qui représente la valeur moyenne  $\langle e \rangle$**  :

$$e(t) = \langle e \rangle + \text{fondamentale de fréq. } f_1 + \text{harmoniques de fréq. } n f_1 \quad (n \geq 2)$$

On rappelle qu'un signal constant, égal à  $\langle e \rangle$  par exemple, peut être considéré comme un signal sinusoïdal de fréquence nulle.

Ainsi, pour ne récupérer que la moyenne du signal en sortie d'un filtre (tout du moins à un facteur constant près), il faut employer un filtre atténuant fortement l'harmonique et les fondamentales.

Un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$  très faible devant la fréquence  $f_1$  du fondamental ne laissera passer que la composante continue du signal et donne ainsi accès à la valeur moyenne du signal à un facteur constant près (correspondant au gain à fréquence nulle) :

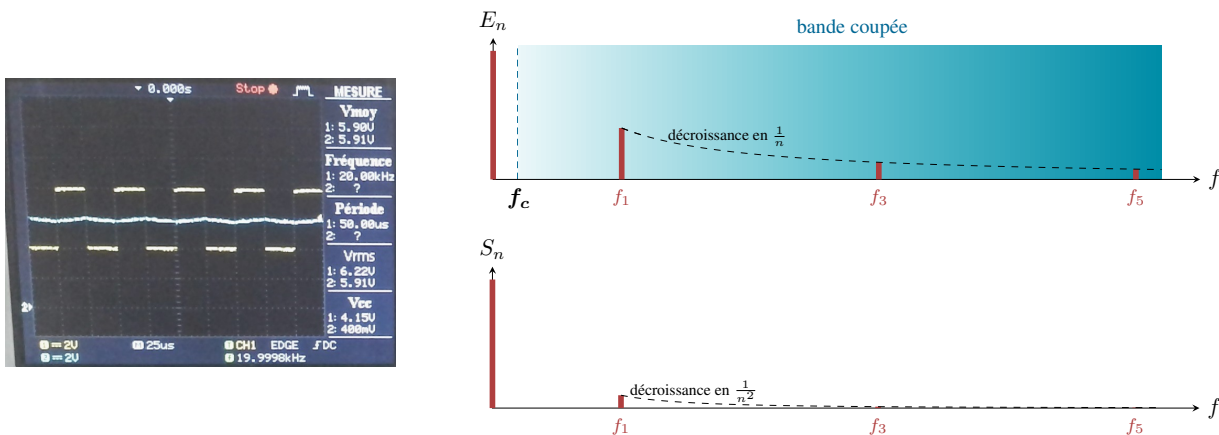
$$s(t) \simeq G(f = 0) \langle e \rangle \quad \text{si } f_c \ll f_1$$

Expérience

Reprenons le filtre passe-bas du paragraphe précédent de fréquence de coupure  $f_c \simeq 800$  Hz. Le gain à fréquence nulle est de 1. Et toutes les fréquences supérieures à 800 Hz sont en dehors de la bande passante.

► Observation du comportement moyenneur

Par exemple, pour un signal d'entrée créneau de fréquence fondamentale  $f_1 = 20$  kHz comportant une composante continue :



En sortie, on observe effectivement un signal quasi-constant prenant comme valeur :

$$G(f = 0) \times \text{composante continue en entrée}$$

Toutes les composantes sinusoïdales ont été fortement atténuées car  $f_1 \gg f_c$  et sont donc ainsi quasi-inexistantes dans le spectre de sortie.

(R) D'après le paragraphe précédent, le filtre devrait se comporter comme un intégrateur du point de vue de la fondamentale et des harmoniques. Et on devrait donc observer en réalité une composante continue auquel se rajoute un signal triangulaire (par intégration du motif rectangulaire). C'est effectivement le cas si on « zoome » sur le signal : cette ondulation triangulaire autour de la composante continue de sortie existe mais est d'amplitude très faible car le filtre a du fortement atténuer les composantes sinusoïdales pour justement pouvoir effectuer cette intégration (voir courbe de gain). En dézoomant (voir photographie ci-dessus), cette ondulation est donc peu perceptible.

## E Impédances d'entrée et de sortie d'un filtre

### E.1 Modélisation des bornes d'un filtre

(voir notes de cours manuscrites)

### E.2 Association en cascade de quadripôles

(voir notes de cours manuscrites)