

# Chapitre 5 : Filtrage linéaire

## Prérequis

- ▶ chapitres d'Électrocinétique
- ▶ chapitre **BA07** - Système linéaire en régime sinusoïdal forcé

## Mots-clés

*Filtrage, principe de superposition, gain, déphasage, diagramme de Bode, fréquences de coupure, bande passante*



## PLAN DU COURS

### A Notions générales sur le filtrage linéaire

- A.1** Caractère linéaire d'un filtre
- A.2** Comportement d'un filtre linéaire en RSF et fonction de transfert
- A.3** Principe de superposition et application au filtrage d'un signal périodique
- A.4** Nature et bande passante d'un filtre

### B Diagramme de Bode

- B.1** Définition
- B.2** Utilisation d'échelles logarithmiques
- B.3** Exemple

### C Exemples de filtres

- C.1** Filtre passe-bas d'ordre 1
- C.2** Filtre passe-haut d'ordre 1
- C.3** Filtre passe-bande d'ordre 2
- C.4** Filtre passe-bas d'ordre 2

### D Réalisation d'opérations à l'aide de filtres

- D.1** Comportement dérivateur d'un filtre
- D.2** Comportement intégrateur d'un filtre
- D.3** Comportement moyennneur d'un filtre

### E Impédances d'entrée et de sortie d'un filtre

- E.1** Modélisation des bornes d'un filtre
- E.2** Association en cascade de filtres



## LES SAVOIRS ET LES SAVOIR-FAIRE



### CAPACITÉS EXIGIBLES

#### ► Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.

- ★ Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
- ★ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.
- ★ Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.

#### ► Modèles de filtres passifs : passe-bas et passehaut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.

- ★ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- ★ Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyennneur, intégrateur, ou dérivateur.
- ★ Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.
- ★ Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).

## A Notions générales sur le filtrage linéaire

### A.1 Caractère linéaire d'un filtre

1. À quelle condition peut-on qualifier un filtre de linéaire ?
2. Définir l'ordre d'un filtre.

### A.2 Comportement d'un filtre linéaire en RSF et fonction de transfert

3. Si l'entrée est sinusoïdale de fréquence  $f$ , que dire de la sortie ? Justifier.
4. Définir la fonction de transfert harmonique d'un signal. Exemple du circuit RC série (tension de sortie aux bornes du condensateur).
5. Définir le gain et le gain en décibel. Préciser le lien avec les amplitudes d'entrée et de sortie.
6. Préciser quand est-ce que l'on peut parler d'atténuation ou d'amplification. Qu'est-ce que cela implique sur le gain et le gain en décibel ?
7. Établir le lien entre la fonction de transfert et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

### A.3 Principe de superposition et application au filtrage d'un signal périodique

8. Préciser ce qu'est le principe de superposition.
9. En utilisant le principe de superposition, expliquer pourquoi le spectre d'un signal peut être modifié grâce à un filtre.

### A.4 Nature et bande passante d'un filtre

10. Qu'appelle-t-on filtre passe-bas, filtre passe-haut, filtre passe-bande, coupe-bande ? Fréquence de coupure, bande passante, bande coupée ou atténuée ?

## B Diagramme de Bode

### B.1 Définition

11. Définir le diagramme de Bode d'un filtre

**B.2** Utilisation d'échelles logarithmiques

12. Expliquer l'intérêt d'une échelle logarithmique (exemple du domaine de l'audible).
13. Qu'est-ce qu'une décade ?

**B.3** Exemple

14. Illustrer la notion de diagramme asymptotique à partir du filtre passe-bas RC série.
15. À partir de l'équation d'un comportement asymptotique, expliquer comment on peut en déduire la valeur de la pente en dB/décade.

**C** Exemples de filtres**C.1** Filtre passe-bas d'ordre 1

16. Rappeler la forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1.
17. En étudiant les cas TBF/THF, montrer qu'un circuit RC ou RL série peut se comporter comme tel en précisant les bornes de sortie (bornes de quel dipôle?). Établir la fonction de transfert et identifier à la forme canonique. Quelle est la pulsation de coupure ?
18. Établir le diagramme de Bode d'un tel filtre.

**C.2** Filtre passe-haut d'ordre 1

19. Rappeler la forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 1.
20. En étudiant les cas TBF/THF, montrer qu'un circuit RC ou RL série peut se comporter comme tel en précisant les bornes de sortie (bornes de quel dipôle?). Établir la fonction de transfert et identifier à la forme canonique. Quelle est la pulsation de coupure ?
21. Établir le diagramme de Bode d'un tel filtre.

**C.3** Filtre passe-bande d'ordre 2

22. Rappeler la forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2.
23. En étudiant les cas TBF/THF, montrer qu'un circuit RLC série peut se comporter comme tel en précisant les bornes de sortie (bornes de quel dipôle?). Établir la fonction de transfert et identifier à la forme canonique. Préciser notamment l'expression du facteur de qualité et de la pulsation centrale  $\omega_0$ .
24. Établir l'expression des pulsations de coupure et montrer que  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$  (voir chapitre **OSC2** pour cela ...).
25. Établir le diagramme de Bode d'un tel filtre pour deux valeurs de facteur de qualité différentes ( $Q = 0,1$  et  $10$  par exemple).

**C.4** Filtre passe-bas d'ordre 2

26. Rappeler la forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 2.
27. En étudiant les cas TBF/THF, montrer qu'un circuit RLC série peut se comporter comme tel en précisant les bornes de sortie (bornes de quel dipôle?). Établir la fonction de transfert et identifier à la forme canonique. Préciser notamment l'expression du facteur de qualité et de la pulsation propre  $\omega_0$ .
28. Montrer qu'il peut exister un phénomène de résonance en précisant à quelle condition sur le facteur de qualité il peut avoir lieu. (voir chapitre **OSC2** pour cela ...). Est-ce un effet désiré pour ce type de filtre ? Expliquer.
29. Établir le diagramme de Bode d'un tel filtre pour un facteur de qualité donnée.
30. En quoi le cas particulier  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$  est-il intéressant ?

## D Réalisation d'opérations à l'aide de filtres

### D.1 Comportement dérivateur d'un filtre

31. À quelle condition sur la fonction de transfert peut-on dire qu'un filtre se comporte comme un dérivateur ?
32. Quelle en est l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode ?
33. À quelle condition un filtre passe-haut d'ordre 1 peut-il se comporter comme un dérivateur ? Expliquer.
34. À quelle condition un filtre passe-bande d'ordre 2 peut-il se comporter comme un dérivateur ? Expliquer.

### D.2 Comportement intégrateur d'un filtre

35. À quelle condition sur la fonction de transfert peut-on dire qu'un filtre se comporte comme un intégrateur ?
36. Quelle en est l'interprétation graphique dans le diagramme de Bode ?
37. À quelle condition un filtre passe-bas d'ordre 1 peut-il se comporter comme un intégrateur ? Expliquer.
38. À quelle condition un filtre passe-bande d'ordre 2 peut-il se comporter comme un intégrateur ? Expliquer.

### D.3 Comportement moyenneur d'un filtre

39. Avec quel type de filtre peut-on obtenir une sortie proportionnelle à la valeur moyenne de l'entrée ? Expliquer.

## E Impédances d'entrée et de sortie d'un filtre

### E.1 Modélisation des bornes d'un filtre

40. Rappeler de quelle manière on peut modéliser les deux bornes d'entrées d'un filtre et définir l'impédance d'entrée.
41. Rappeler de quelle manière on peut modéliser les deux bornes de sortie d'un filtre et définir l'impédance de sortie.
42. Illustrer avec l'exemple du circuit RC série (passe-bas).

### E.2 Association en cascade de filtres

43. Lorsque deux filtres 1 et 2 sont associés en cascade dans cet ordre, montrer que la fonction de transfert de l'ensemble peut s'écrire :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}}$$

44. Pourquoi est-il préférable de privilégier de fortes impédances d'entrée et de faibles impédances de sortie ?
45. Illustration dans le cas d'un filtre passe-bas RC série avec une charge  $R_c$  en parallèle du condensateur : préciser quelle est l'impédance de sortie du filtre, quelle est la fonction de transfert de l'ensemble, et montrer qu'il est effectivement préférable que  $R_c$  soit très grand devant l'impédance de sortie du filtre.



# EXERCICES

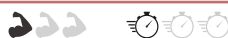
**DIFFICULTÉ DE L'EXERCICE** (ANALYSE, «TECHNICITÉ», ...)

**DURÉE DE L'EXERCICE**

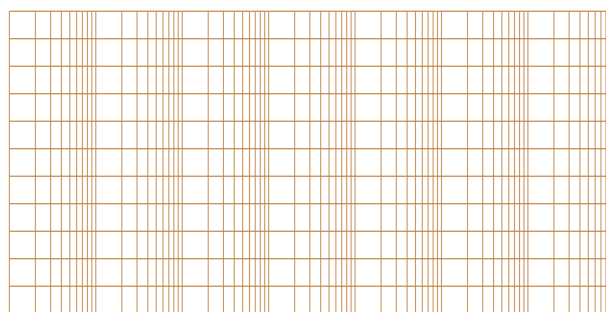
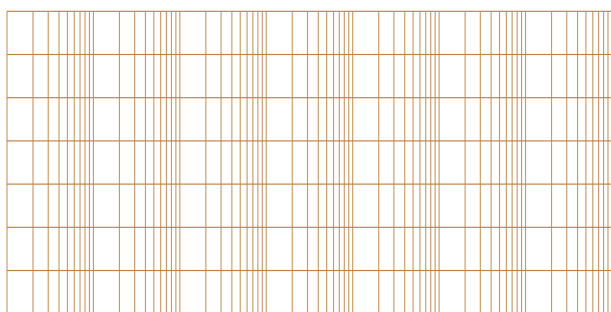
COMPÉTENCES TRAVAILLÉES	Exercices							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Lecture d'un diagramme de Bode				•			•	
Étudier la réponse d'un filtre linéaire à un signal d'entrée périodique				•	•		•	
Comportement TBF/THF d'un filtre			•				•	
Établir la fonction de transfert d'un filtre			•			•		
Tracé d'un diagramme de Bode	•					•		
Mise en cascade de filtres						•		
Comportement dérivateur/intégrateur d'un filtre				•			•	•
Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges		•			•			•

## Exercice 1

### Tracé d'un diagramme de Bode



On s'intéresse à un filtre passe-bas d'ordre 1 de fonction de transfert :  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\omega/\omega_c}$ . La fréquence de coupure vaut  $f_c = 2,0$  kHz et  $H_0 = 0,1$ . Représenter le diagramme de Bode ci-dessous **en représentant la fréquence** en abscisse.



## Exercice 2

### Conception d'un filtre



On souhaite qu'un filtre puisse traiter des signaux électrique provenant d'un capteur acoustique en ne gardant que les composantes sonores ( $f \leq 20$  kHz). On cherche alors à concevoir un filtre passe-bas de gain maximal  $G_{dB,max} = 0$  dB dans la bande passante. De plus, on impose que l'atténuation n'exède pas 3 dB pour  $f \leq f_p = 20$  kHz. Enfin, on souhaite que l'atténuation soit supérieure à 10 dB pour  $f \geq 2f_p$ .

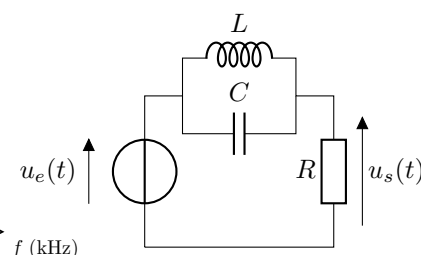
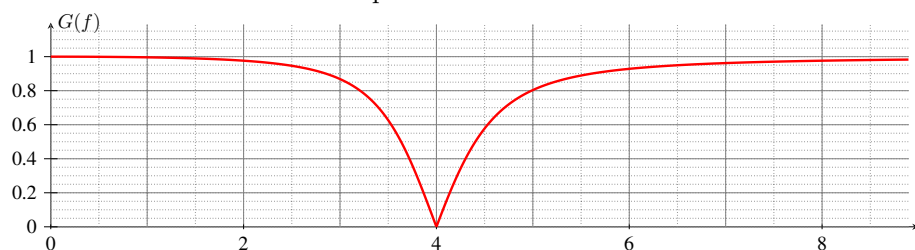
1. Représenter le gabarit de ce filtre (*il s'agit d'une représentation graphique du cahier des charges du filtre*).
2. Montrer qu'un filtre d'ordre 1 ne satisfait pas ce gabarit.
3. On envisage l'utilisation d'un filtre passe-bas d'ordre 2 de fréquence propre  $f_0 = f_p$ . Rappeler l'expression canonique de la fonction de transfert. Quelle doit être la valeur du gain statique  $H_0$ ? Quelle valeur du facteur de qualité  $Q$  faut-il choisir?

## Exercice 3

### Filtre coupe-bande



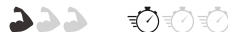
1. Expliquer l'allure de la courbe de gain ci-dessous du filtre ci-contre à partir d'étude de cas limites et de l'expression de la fonction de transfert.



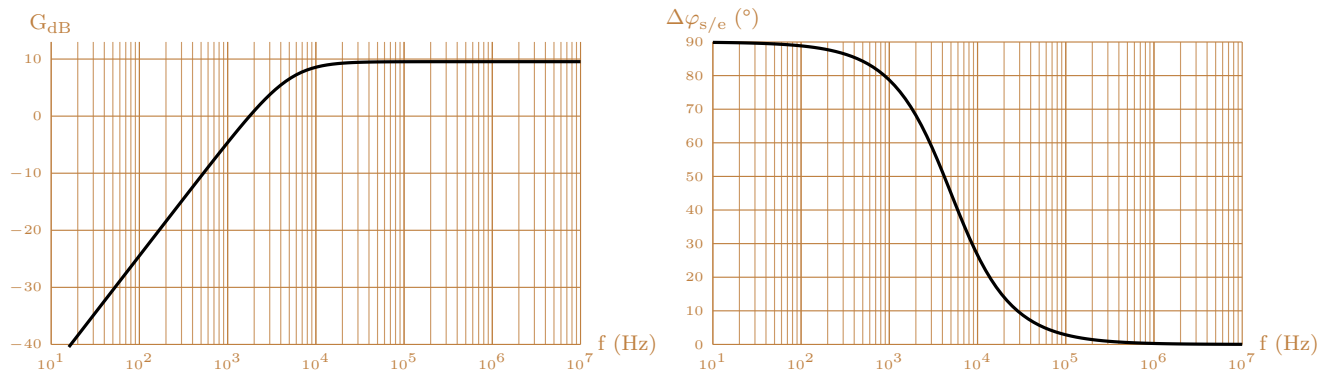
2. Quelle est la bande coupée de filtre?

Exercice 4

Action d'un filtre sur différents signaux

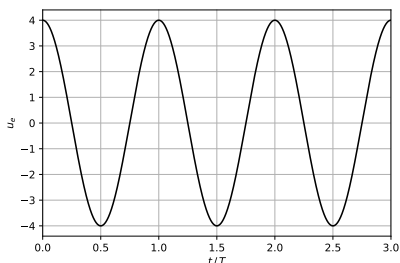


On s'intéresse à un filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous :

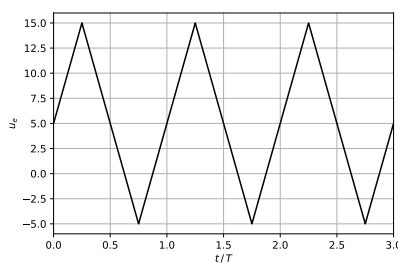


- De quel type de filtre s'agit-il? Que vaut la fréquence de coupure à -3 dB?
- Pour chaque entrée ci-dessous :

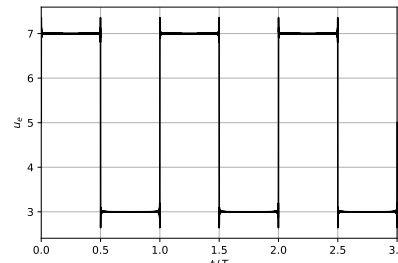
cas (a)  $f_1 = 200$  Hz



cas (b)  $f_1 = 10$  Hz

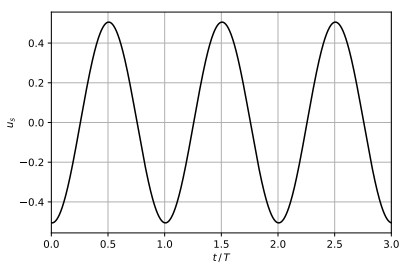


cas (c)  $f_1 = 600$  kHz

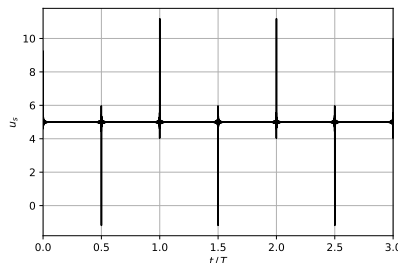


quelle est la tension de sortie correspondante parmi celles-ci dessous? Justifier.

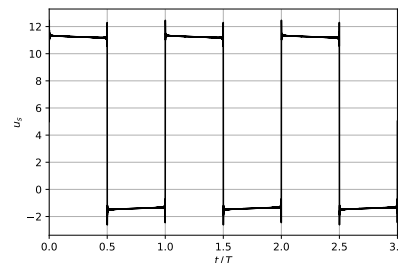
sortie n°1



sortie n°2



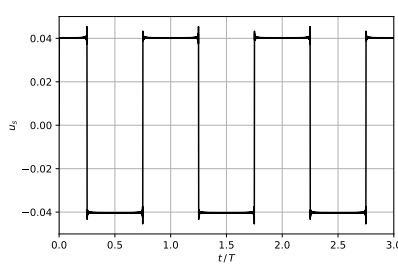
sortie n°3



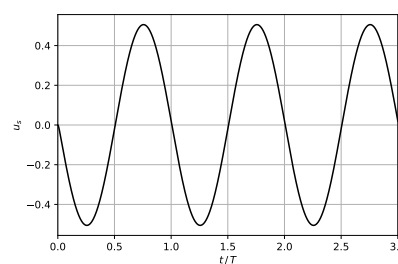
sortie n°4



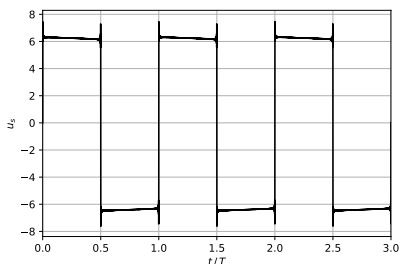
sortie n°5



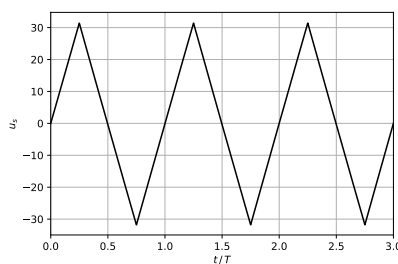
sortie n°6



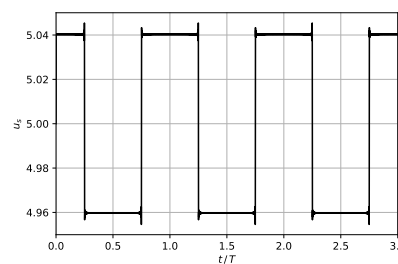
sortie n°7



sortie n°8



sortie n°9

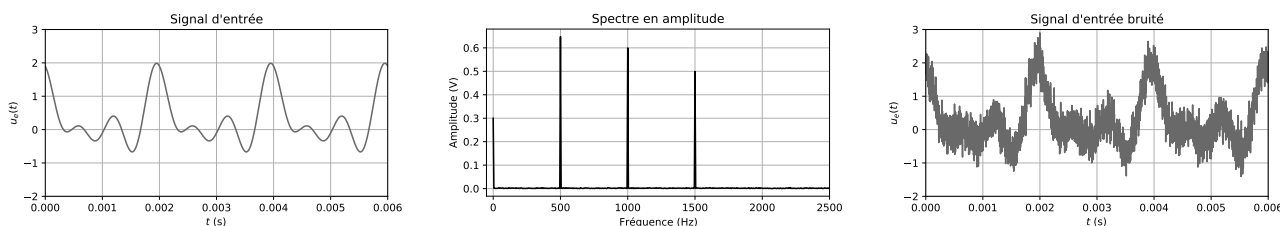


Exercice 5

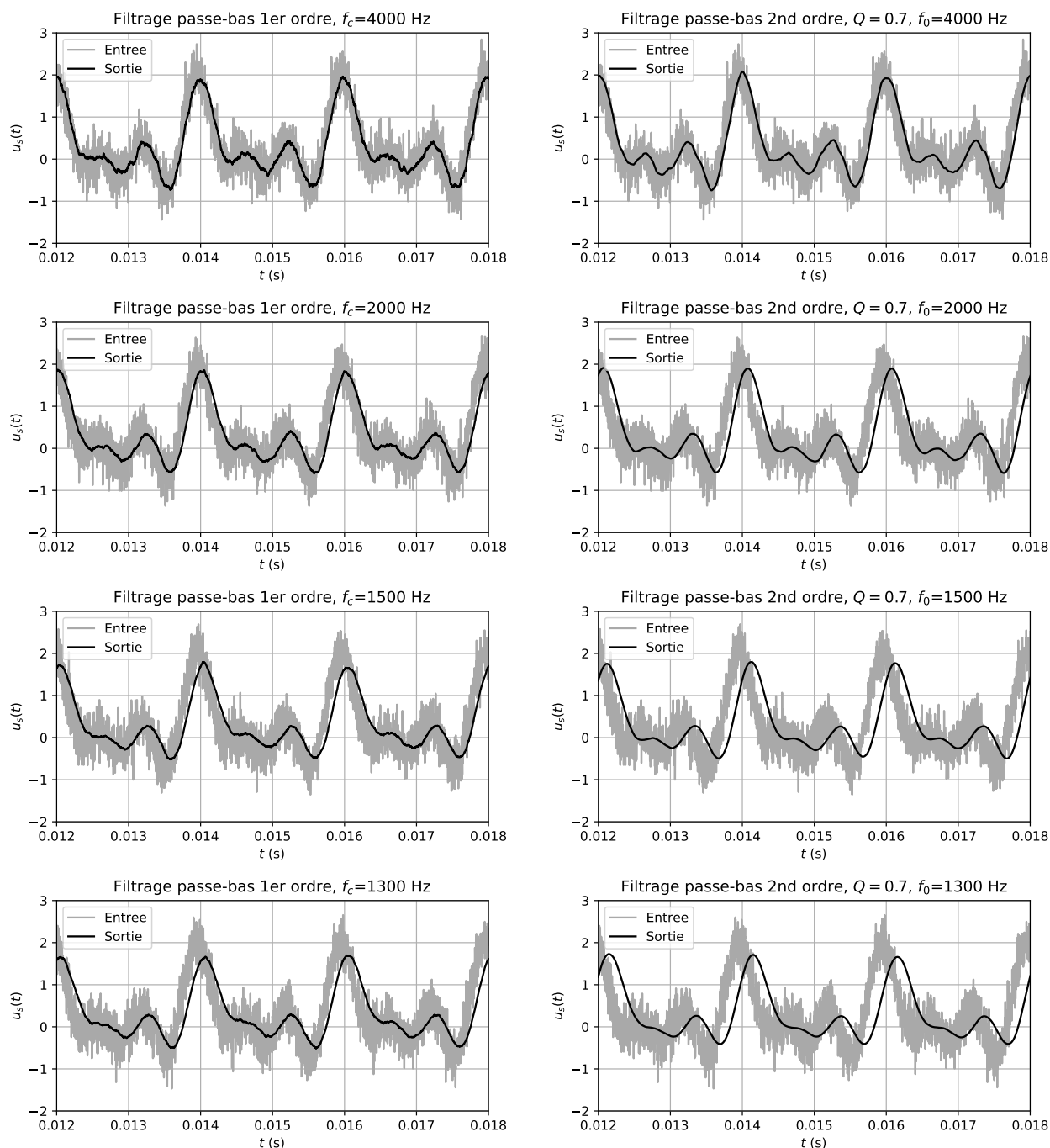
Filtrage d'un signal bruité



On souhaite transmettre le signal ci-dessous à gauche. Malheureusement, le processus de transmission a généré du bruit (ci-dessous à droite). On souhaite alors éliminer le bruit à l'aide d'un filtrage passe-bas.



1. Comparer et commenter les sorties obtenues ci-dessous suivant le filtrage appliqué (voir titres des tracés).



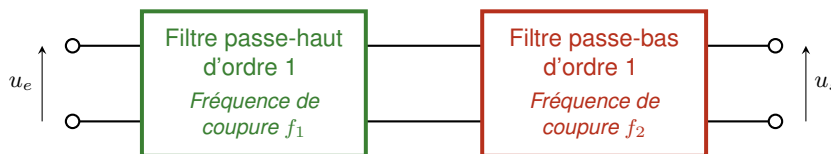
2. Proposer un filtre qui aurait permis de surcroît d'éliminer la composante continue. Préciser ses caractéristiques et les valeurs des composants.

**Exercice 6**

Mise en cascade de filtres



1. Afin de réaliser un filtre passe-bande d'ordre 2, on met en cascade un filtre passe-haut d'ordre 1 (fréquence de coupure  $f_1$ ) et un filtre passe-bas d'ordre 1 (fréquence de coupure  $f_2$ ). On note respectivement  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  leurs fonctions de transfert en sortie ouverte. À quelle condition peut-on écrire que la fonction de transfert de l'ensemble est  $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$  ?



Dans la suite, on considère que cette condition est remplie et on prendra un gain maximal égal à 1 pour chacun des deux filtres d'ordre 1.

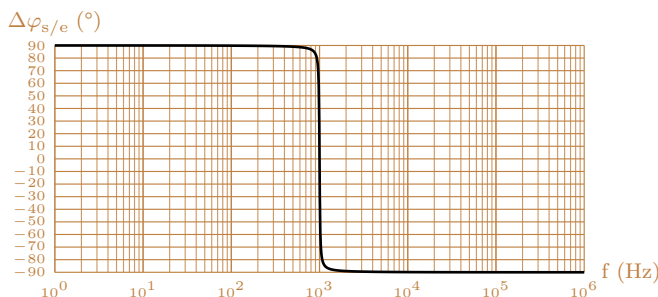
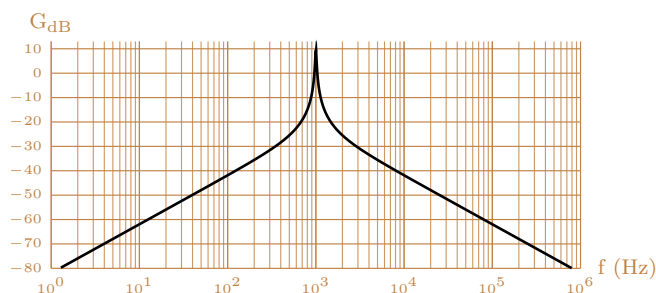
2. Quelle est l'expression de  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  en fonction de  $f$  et  $f_1$  ou  $f_2$  ?
3. Montrer que la fonction de transfert de l'ensemble peut s'identifier à celle d'un filtre passe-bande d'ordre 2. On exprimera le gain maximal  $H_0$ , la fréquence propre  $f_0$  et le facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $f_1$  et  $f_2$ .
4. On suppose  $f_1 \ll f_2$ . Étudier le diagramme de Bode asymptotique de chaque filtre d'ordre 1. En déduire le diagramme de Bode du filtre passe-bande ainsi constitué. On représentera  $\log f$  en abscisse.

**Exercice 7**

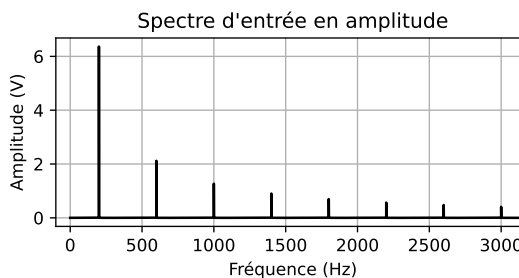
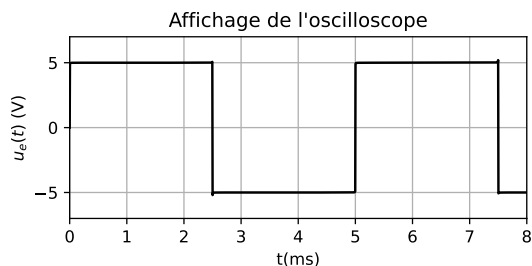
Isolation d'une harmonique



On donne ci-dessous le diagramme de Bode d'un filtre.

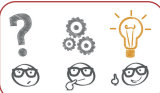


1. De quel type de filtre s'agit-il ? Quelles sont ses caractéristiques ?
2. On applique à l'entrée de ce filtre le signal créneau ci-dessous :



Représenter le signal de sortie sur l'affichage de l'oscilloscope ci-dessus.

3. On modifie la fréquence fondamentale à 10 kHz. Quelle sera l'allure du signal de sortie ?



**RÉSOLUTION DE PROBLÈME**

**Exercice 8**

Quel filtre ?



On visualise sur l'écran d'un oscilloscope la tension d'entrée (en haut) et la tension de sortie (en bas) d'un filtre. La base de temps est de  $200 \mu\text{s}/\text{div}$ . La sensibilité verticale pour l'entrée est de  $5 \text{ V}/\text{div}$  pour le signal entrée et  $2 \text{ mV}/\text{div}$  pour le signal de sortie. Les signaux observés sont de valeur moyenne nulle.

Proposer un filtre conforme à ces observations.

