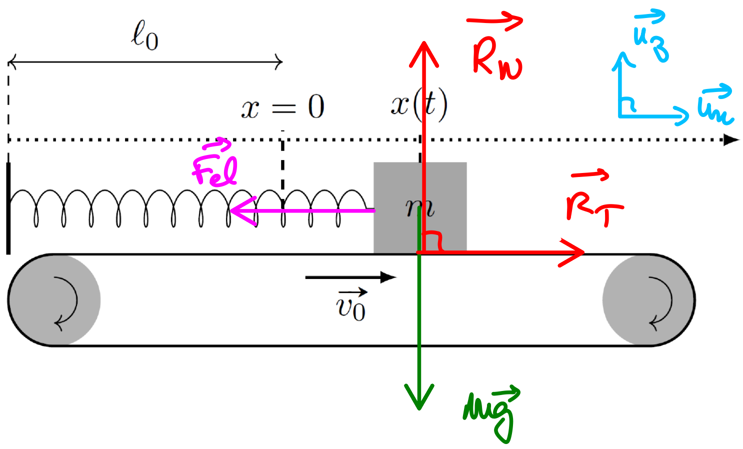
« Stick-Slip »



<u>Système étudié</u> : {masse}

<u>Référentiel d'étude</u> : terrestre supposé galiléen

Notons $\begin{cases} R_N = \|\vec{R_N}\| \\ R_T = \|\vec{R_T}\| \end{cases}$

et $\vec{v_0} = v_0 \vec{u_x}$

1) <u>D'après la 2ème loi de Newton :</u>

$$m\vec{a} = \vec{R_T} + \vec{F_{el}} + m\vec{g} + \vec{R_N}$$

$$m\vec{a} = R_T\vec{u_x} - k(\ell - \ell_0)\vec{u_x} - mg\vec{u_z} + R_N\vec{u_z}$$

<u>Projetons suivant $\vec{u_z}$</u> :

$$m\ddot{z} = 0 - 0 - mg + R_N$$

Or $z(t)$ = constante dans ce problème.

Donc $\ddot{z} = 0 \Rightarrow \boxed{R_N = mg}$

2) Si la vitesse de glissement est initialement nulle (c'est le cas d'après l'énoncé), <u>le non-glissement continue tant que</u> :

$R_T \leq f_s R_N$ d'après les lois de Coulomb

$\Leftrightarrow \boxed{R_T \leq f_s mg}$ (1)

→ <u>Quelle est l'expression de R_T en fonction de x ?</u>

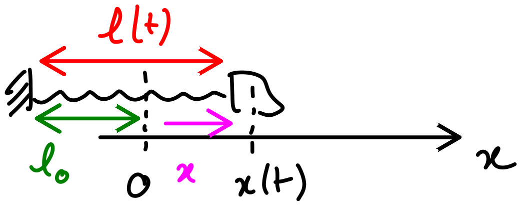
Projetons la 2ème loi de Newton suivant $\vec{u_x}$:

$$m\ddot{x} = R_T - k(\ell - \ell_0)$$

or : $\boxed{\dot{x}(t) = v_0}$ $\rightarrow$ puisque $\vec{v} = v_0 \vec{u_x}$
(non-glissement de la masse donc même vitesse que le support)

$\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{x} = 0}$

De plus



$$\boxed{\ell(t) = \ell_0 + x}$$

D'où : $0 = R_T - kx$

$$\boxed{kx = R_T}$$

AINSI (1) $\Leftrightarrow$ $kx \leqslant f_s mg$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x \leqslant x_{max} \ , \text{ où } x_{max} = \frac{f_s mg}{k}}$

3) Déterminons t_1 tel que $\boxed{x(t_1) = x_{max}}$ (2)

quelle est l'expression de $x(t)$?

On sait que $\dot{x}(t) = v_0$ tant qu'il y a non-glissement.

Intégrons entre 0 et t avec $x(0) = 0$:

$$x(t) - x(0) = v_0 t$$

$$\boxed{x(t) = v_0 t}$$

Ainsi : (2) $\Leftrightarrow$ $t_1 = \frac{x_{max}}{v_0}$

$$\boxed{t_1 = \frac{f_s mg}{k v_0}}$$

4) Désormais $\vec{v} \neq v_0 \vec{u_x}$ $\Rightarrow$ $\dot{x} \neq v_0$ $\Rightarrow$ $\ddot{x} \neq 0$

D'après la 2ème loi de Newton projetée suivant $\vec{u_x}$:

$$m\ddot{x} = R_T - kx$$

avec $R_T = f_d R_N$ d'après les lois de Coulomb
$= f_d\, mg$

D'où $\boxed{m\ddot{x} + kx = f_d\, mg}$ (3)

À l'équilibre : $\begin{cases} x(t) = x'_{éq} \\ \dot{x}(t) = 0 \\ \ddot{x}(t) = 0 \end{cases}$ ← différente de $x_{éq} = 0$

Donc $0 + k x'_{éq} = f_d\, mg$ $\Rightarrow$ $\boxed{x'_{éq} = \frac{f_d\, mg}{k}}$

Ainsi (3) $\Leftrightarrow$ $m\ddot{x} + kx = k x'_{éq}$

$$\boxed{\begin{gathered} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x'_{éq} \\ \text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{gathered}} \quad (4)$$

5) Le glissement s'arrête si :

» la vitesse de glissement s'annule $\Leftrightarrow$ $\dot{x} = v_0$ (A)

» la condition de non-glissement est satisfaite :

$R_T \leqslant f_s R_N$ $\Leftrightarrow$ $x \leqslant x_{max}$ (B)

À quel instant t_2 ces conditions sont-elles satisfaites ?

↳ Déterminons tout d'abord l'expression de $x(t')$

Résolvons (4).

La solution est de la forme :

$$x(t') = \underbrace{x_p}_{\text{constante car 2nd membre constant}} + x_H(t')$$

$x_p = x'_{eq}$ est solution.

D'où $\boxed{x(t') = x'_{eq} + \underbrace{\alpha\cos(\omega_0 t') + \beta\sin(\omega_0 t')}_{x_H(t)}}$

$\Rightarrow$ $\dot{x}(t') = -\alpha\omega_0\sin(\omega_0 t') + \beta\omega_0\cos(\omega_0 t')$

Que valent α et β ?

À $t'=0$, on a : $\begin{cases} x(0) = x_{max} \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$ (continuité de la vitesse lorsque le glissement s'amorce)

D'où : $\begin{cases} \alpha = x_{max} - x'_{eq} \\ \beta = \dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = (f_s - f_d)\dfrac{mg}{k} \\ \beta = \dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases}}$

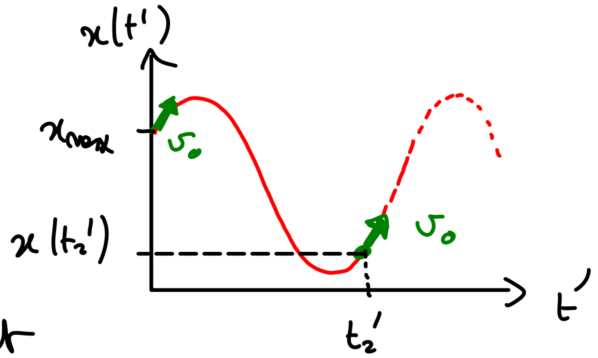
Ainsi : (A) $\Leftrightarrow$ $-\alpha\omega_0\sin(\omega_0 t'_2) + \beta\omega_0\cos(\omega_0 t'_2) = 0$ $(*)$

$\Leftrightarrow$ $\tan(\omega_0 t'_2) = \dfrac{\beta}{\alpha}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{t'_2 = \dfrac{1}{\omega_0}\text{Arctan}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)} = \dfrac{1}{\omega_0}\text{Arctan}\left(\dfrac{k v_0}{\omega_0 (f_s - f_d)}\right)$

Est-ce que la condition (B) est satisfaite à cet instant ?

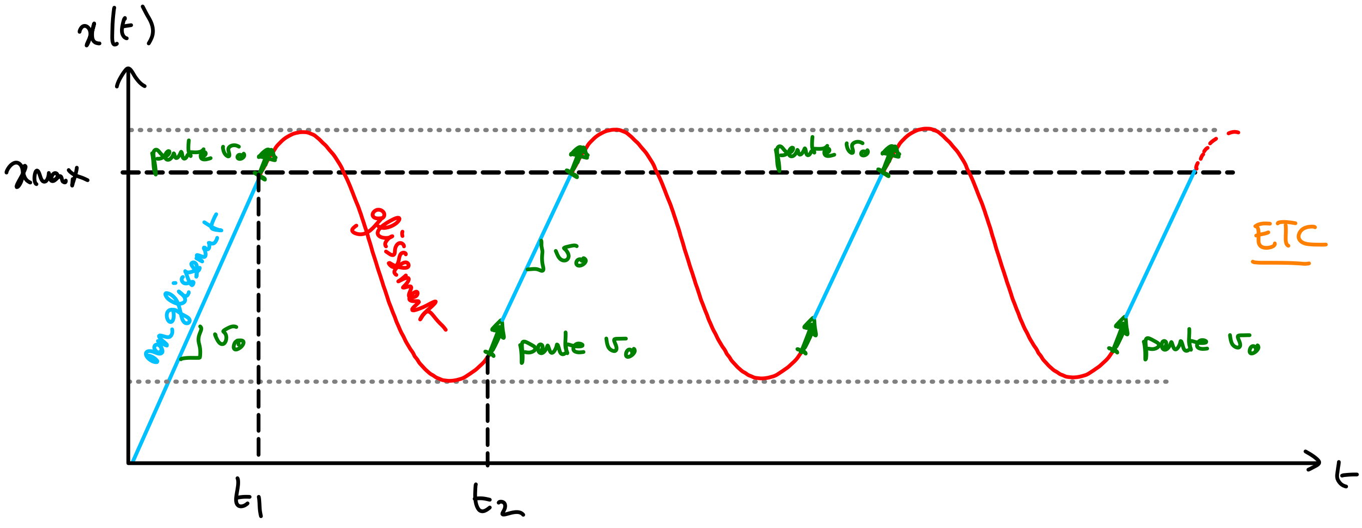
Approche graphique :



Il apparaît clairement que $\boxed{x(t'_2) < x_{max}}$

Ainsi le non-glissement est à nouveau satisfait à t'_2

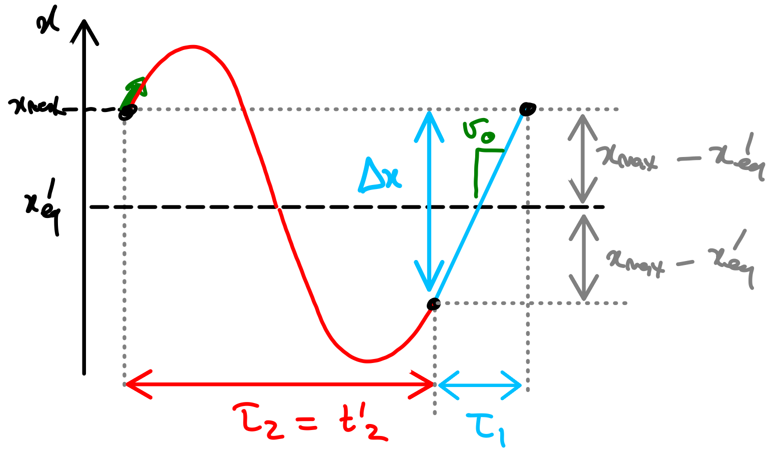
4]



5] ☐ Pour justifier complétons le tracé précédent au-delà de t_2.

À partir de t_2, le non-glissement entraîne à nouveau la masse vers x_{max}, puis le glissement survient et ainsi de suite

☐ Période T ? Voici le motif qui se répète :



$$T = \tau_1 + \tau_2$$
$$= \frac{\Delta x}{v_0} + t'_2$$
$$= \frac{2(x_{max} - x'_{eq})}{v_0} + t'_2$$

$$\boxed{T = \frac{2(f_s - f_d)mg}{k v_0} + \frac{1}{\omega_0} \mathrm{Arctan}\left(\frac{k v_0}{\omega_0 (f_s - f_d)}\right)}$$