Viscosimètre à bille

1) Effectuons une analyse dimensionnelle :

$$[\vec{f}] = [6\pi R][\eta][\vec{v}]$$

Donc

$$\frac{[\text{force}]}{[\text{surface}]} = \frac{1}{[\text{surface}]} L . [\eta] . LT^{-1}$$

$$[\text{pression}] = \frac{L^2 . T^{-1}}{L^2} [\eta]$$

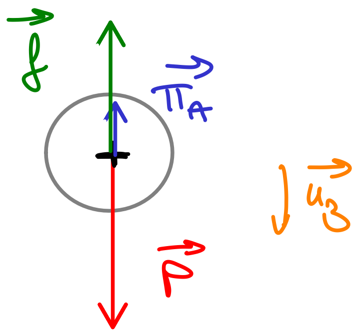
D'où $\boxed{[\eta] = [\text{pression}]\, T}$

L'unité SI correspondante est le Pa.s

(Il s'agit d'un poiseuille de symbole Pl ...)

2) La bille accélère vers le bas sous l'effet du poids. En gagnant de la vitesse, la norme de la force $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ s'opposant au mouvement augmente et finit par compenser les autres forces :

$$\vec{P} + \vec{\Pi_A} + \vec{f} = \vec{0} \quad (*)$$



La bille est alors pseudo-isolée.
Puisque le référentiel d'étude est supposé galiléen et qu'elle a pu acquérir de la vitesse, son mouvement devient rectiligne et uniforme.

$\vec{v_{lim}}$ vérifie alors, d'après $(*)$:

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a}_{\text{masse de la bille}} g \vec{u_3} - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_g g \vec{u_3} - \lambda v_{lim} \vec{u_3} = \vec{0}$$

D'où $$6\pi R \eta v_{lim} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_a - \rho_f) g$$

$$\boxed{v_{lim} = \frac{2}{9\eta} R^2 (\rho_a - \rho_f) g}$$

3) $$\boxed{\eta = \frac{2}{9 v_{lim}} R^2 (\rho_a - \rho_f) g}$$

Convertir en $kg.m^{-3}$ ($1m^3 = 10^3 L$)

AN : $$\eta = \frac{2}{9 \times 3{,}8.10^{-2}} \times (2{,}0.10^{-3})^2 \times (7{,}8.10^3 - 1{,}26.10^3) \times 9{,}81$$

$$\underline{\eta = 1{,}5 \text{ Pa.s}}$$

4) D'après la 2ème loi de Newton appliquée à la bille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi_A} + \vec{f}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi_A} - \lambda\vec{v}$$

Or, d'après 2) $\vec{P} + \vec{\Pi_A} = \lambda \vec{v_{lim}}$.

D'où : $$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \lambda\vec{v_{lim}} - \lambda\vec{v}}$$

Avec $\vec{v} = v\vec{u_z}$ et $\vec{v_{lim}} = v_{lim}\vec{u_z}$:

$$m\frac{dv}{dt}\vec{u_z} = (\lambda v_{lim} - \lambda v)\vec{u_z}$$

car $\vec{u_z} = \overrightarrow{\text{constant}}$

Projetons suivant $\vec{u_3}$:

$$m\dot{v} + \lambda v = \lambda v_{lim}$$

$$\boxed{\tau \dot{v} + v = v_{lim}}$$

où $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a}{6\pi R \eta}$$

$$\boxed{\tau = \frac{2\rho_a R^2}{9\eta}}$$

AN : $\tau = 4{,}6.10^{-3}\,s$

$\tau = 4{,}6\,ms$

5) La solution est de la forme :

$$v(t) = v_H(t) + v_p(t)$$

$=Ae^{-t/\tau}$

solution de l'éq. homogène

solution particulière constante car 2nd membre constant

$v_p = v_{lim}$ est solution.

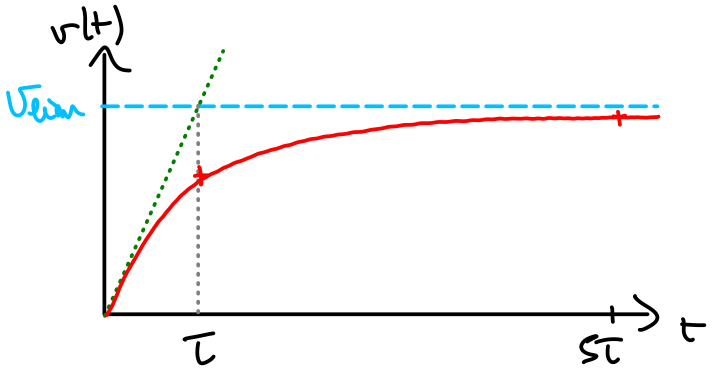
D'où $v(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{lim}$

Déterminons la constante A :

$v(0) = 0 \Rightarrow Ae^0 + v_{lim} = 0 \Rightarrow A = -v_{lim}$

D'où $\boxed{v(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

(tend bien vers v_{lim})



Le régime transitoire est terminé à 1% près au bout d'une durée d'environ $5\tau = 23\,ms$