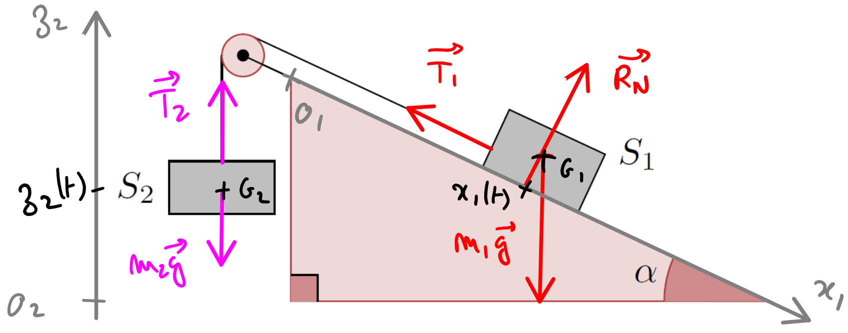
Masses, plan incliné et poulie



Rmq :

$\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = T$

car fil et poulie sans masse

1) Comme le fil est inextensible et tendu, alors chaque extrémité du fil se déplace de la même quantité pendant dt. D'où nécessairement :

$$dx_1 = dz_2$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dz_2}{dt}$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}_2(t)$$

En dérivant par rapport au temps : $\boxed{\ddot{x}_1(t) = \ddot{z}_2(t) = a(t)}$

2) Appliquons la 2ème loi de Newton pour S_2 :

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2$$

$$= -m_2 g\vec{u_z} + T\vec{u_z}$$

D'où en projetant suivant $\vec{u_{z_2}}$:

$$m_2\ddot{z}_2 = -m_2 g + T$$

$$\boxed{m_2 a = -m_2 g + T} \quad (2)$$

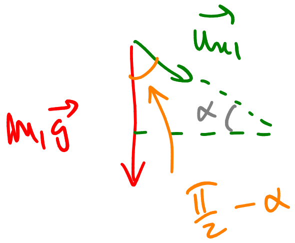
une équation à 2 inconnues : a et T
pas suffisant donc ...

De même pour S_1 :

$$m_1 \vec{a_1} = m_1 \vec{g} + \vec{T_1} + \vec{R_N} \qquad \text{avec } \vec{T_1} = -T\,\vec{u_{x_1}}$$

Projetons suivant $\vec{u_{x_1}}$:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 \vec{g}\cdot\vec{u_{x_1}} - T + \underbrace{\vec{R_N}\cdot\vec{u_{x_1}}}_{=0\text{, car } \vec{R_N} \perp \vec{u_{x_1}}}$$



$$m_1 a = m_1 g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - T$$

$$\boxed{m_1 a = m_1 g \sin\alpha - T} \quad (1)$$

Effectuons $(1) + (2)$ pour éliminer T :

$$(m_1 + m_2)\, a = (m_1 \sin\alpha - m_2)\, g$$

$$\boxed{a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}\, g}$$

avec $\ddot{x}_1 = \ddot{z}_2 = a$ (Rappel)

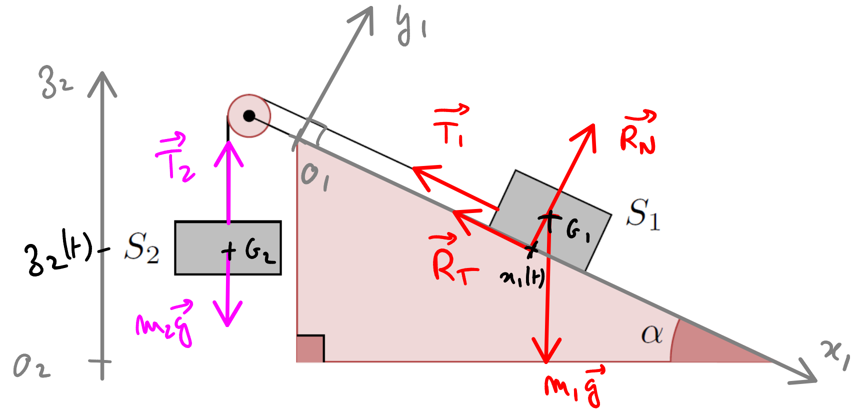
Rmq : • si $m_2 < m_1 \sin\alpha \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$ S_2 accéléré vers le haut et S_1 dans le sens de la pente

Et inversement

• si $m_2 = m_1 \sin\alpha$ et vitesses initiales nulles

$\Rightarrow$ l'ensemble reste immobile $(a = 0)$

4) Désormais, il existe une réaction tangentielle $\vec{R_T}$:



Rmq :
$\vec{R_T} = \pm R_T \vec{u_{x_1}}$
où $R_T = \|\vec{R_T}\|$

L'ensemble est immobile $\Longleftrightarrow$ non-glissement de S_1

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{R_T \leqslant f\, R_N} \quad \text{où} \quad \begin{cases} R_T = \|\vec{R_T}\| \\ R_N = \|\vec{R_N}\| \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Expression de R_N et R_T ??

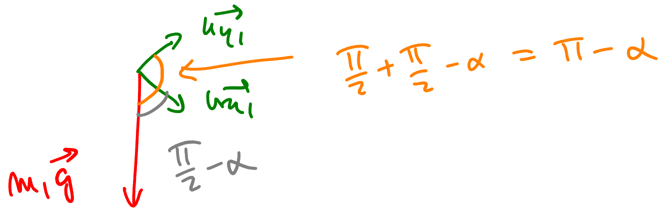
Avec $\vec{a_1} = \vec{0}$ (S_1 au repos) :

$$m_1\vec{g} + \vec{T_1} + \vec{R_N} + \vec{R_T} = \vec{0}$$

$$m_1\vec{g} - T\,\vec{u_{x_1}} + R_N\,\vec{u_{y_1}} \pm R_T\,\vec{u_{x_1}} = \vec{0}$$

D'où en projetant suivant $\vec{u_{y_1}}$:

$$m_1\vec{g}\cdot\vec{u_{y_1}} + 0 + R_N + 0 = 0$$



D'où $\quad m_1\, g \underbrace{\cos(\pi - \alpha)}_{= -\cos\alpha} + R_N = 0$

$$\boxed{R_N = m_1\, g \cos\alpha}$$

Et en projetant suivant $\vec{u_{x_1}}$:

$$\underbrace{m_1 g \sin\alpha}_{\text{déjà fait...}} - T + 0 \pm R_T = 0$$

$$\pm R_T = T - m_1 g \sin\alpha$$

⇝ <u>que vaut T ?</u>

<u>Or</u>, pour S_2, avec $\vec{a_2} = \vec{0}$ (S_2 au repos) :

$$m_2 \vec{g} + \vec{T_2} = \vec{0}$$

$$-m_2 g \vec{u_{z_2}} + T \vec{u_{z_2}} = \vec{0}$$

$$T = m_2 g$$

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} \pm R_T &= (m_2 - m_1 \sin\alpha) g \\ \Leftrightarrow R_T &= \pm (m_2 - m_1 \sin\alpha) g \end{aligned}}$$

+ ou − ??

Puisque $R_T = \|\vec{R_T}\| \geqslant 0$

alors

$$\boxed{\begin{cases} R_T = (m_2 - m_1 \sin\alpha) g, & \text{si } m_2 > m_1 \sin\alpha \\ R_T = (m_1 \sin\alpha - m_2) g, & \text{si } m_1 \sin\alpha > m_2 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_T = |m_2 - m_1 \sin\alpha| g}$$

<u>AINSI</u> :

$$R_T \leqslant f R_N$$

$$\Leftrightarrow \boxed{|m_2 - m_1 \sin\alpha| \leqslant f m_1 \cos\alpha}$$

Si $m_2 > m_1 \sin\alpha$

$(*) \Leftrightarrow m_2 - m_1 \sin\alpha \leqslant f m_1 \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \boxed{m_2 \leqslant m_1 (\sin\alpha + f \cos\alpha)}$

Si $m_2 < m_1 \sin\alpha$

$(*) \Leftrightarrow m_1 \sin\alpha - m_2 \leqslant f m_1 \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \boxed{m_2 \geqslant m_1 (\sin\alpha - f \cos\alpha)}$

Interprétation physique

Si m_2 est trop grand,
($m_2 > m_1 \sin\alpha$ notamment
ce qui ferait glisser
S_1 vers le bas)
mais "pas trop" non plus,
(inférieure à $m_1(\sin\alpha + f\cos\alpha)$)
alors le glissement n'aura pas
lieu.

Raisonnement
inverse ...