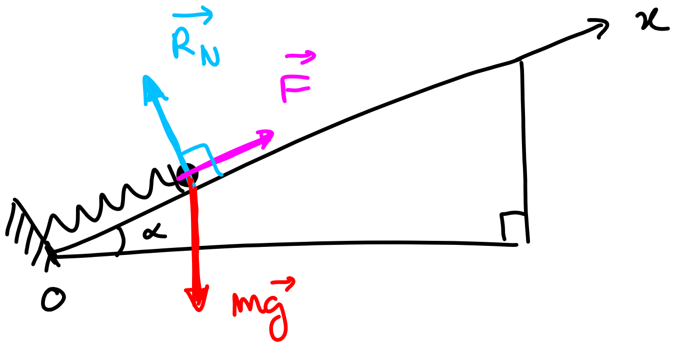
Lancé de bille au flipper



<u>Référentiel d'étude</u> : réf. terrestre supposé galiléen

<u>Système étudié</u> : { bille }

<u>avec</u> : $\vec{F} = -k(l - l_0)\,\vec{u_x}$

$= -k(x - l_0)\,\vec{u_x}$ ici, $x(t) = l(t)$

1) À l'équilibre, d'après le principe d'inertie :

$$m\vec{g} + \vec{R_N} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$m\vec{g} + \vec{R_N} - k(l_{eq} - l_0)\,\vec{u_x} = \vec{0}$$

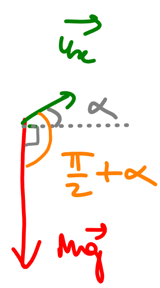
Projetons suivant $\vec{u_x}$:

$$\vec{0}\cdot\vec{u_x} = m\vec{g}\cdot\vec{u_x} + \underbrace{\vec{R_N}\cdot\vec{u_x}}_{=0} - k(\underbrace{l_{eq}}_{= x_{eq} \text{ ici}} - l_0)\underbrace{\vec{u_x}\cdot\vec{u_x}}_{=1}$$

$= 0$ car $\vec{R_N} \perp \vec{u_x}$

$$0 = m\vec{g}\cdot\vec{u_x} - k(x_{eq} - l_0)$$

$$0 = mg\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}_{=-\sin\alpha} - k(x_{eq} - l_0)$$



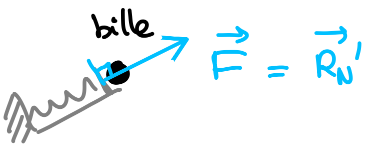
$$k\,x_{eq} = k l_0 - mg\sin\alpha \quad (1)$$

(← on s'en resservira plus tard...)

$$\boxed{x_{eq} = l_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k}}$$

<u>AN</u> : $\boxed{x_{eq} = 14 \text{ cm}}$

2) La bille est POSÉE contre l'extrémité du ressort. Il y a donc 2 réactions normales : $\vec{R_N}$ et $\vec{F}$!



Pour que la bille ne décolle pas de l'extrémité du ressort, il faut que $\vec{F}$ agisse toujours suivant $+\vec{u_x}$:

$$\Leftrightarrow \quad -k(x(t) - l_0) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x(t) < l_0} \leftarrow \text{Condition de NON-décollement}$$

À l'inverse : il y aura décollement dès que $x(t)$ atteint la valeur l_0.

3) Tant qu'il y a contact avec l'extrémité du ressort :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k(\underbrace{l}_{=x} - l_0)\,\vec{u_x} + \vec{R_N}$$

Projetons suivant $\vec{u_x}$:

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - k(x - l_0) + 0$$

$$m\ddot{x} + kx = \underbrace{k l_0 - mg\sin\alpha}_{= k\, x_{eq} \text{ d'après (1)}}$$

D'où
$$\boxed{\begin{gathered}\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq} \\ \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\end{gathered}}$$

Résolution

$x(t)$ est de la forme :

$$x(t) = \underbrace{x_{part}}_{\substack{= \text{ constante} \\ \text{car 2nd membre} \\ \text{constant}}} + \underbrace{x_{HGN}(t)}_{= \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)}$$

x_{part} vérifie donc $\quad 0 + \omega_0^2 x_{part} = \omega_0^2 x_{eq}$

$$\Rightarrow \boxed{x_{part} = x_{eq}}$$

D'où $\quad x(t) = x_{eq} + \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$

α ? β ? $\Rightarrow$ exploitation des conditions initiales

On a : $\quad x(0) = x_{eq} - d \quad$ d'après l'énoncé

$$x_{eq} + \alpha \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \beta \underbrace{\sin(0)}_{=0} = x_{eq} - d$$

$$\boxed{\alpha = -d}$$

De plus
$$\begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \quad \text{car } \vec{v}(0) = \vec{0} \\ \dot{x}(t) = -\alpha \omega_0 \sin(\omega_0 t) + \beta \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

D'où $\quad -\alpha \omega_0 \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \beta \omega_0 \underbrace{\cos(0)}_{=1} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

Finalement :

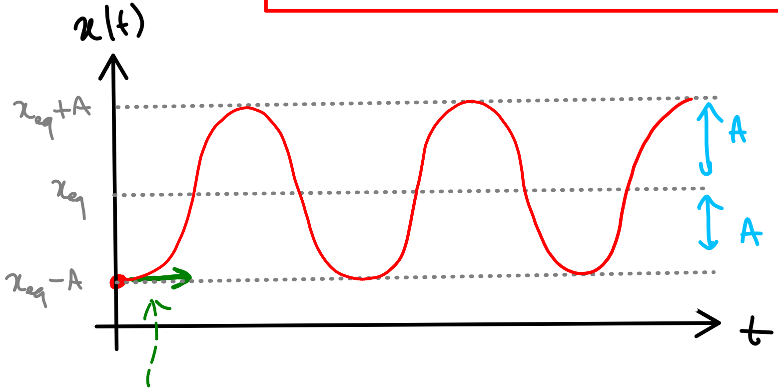
$$\boxed{x(t) = x_{eq} - d\cos(\omega_0 t)}$$

Ici :

$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ← amplitude

$= |\alpha|$

$$\boxed{A = d}$$



Rmq : $\dot{x}(0) = 0$ donc tangente initiale horizontale

4) La bille n'est pas éjectée tant que $x(t) < \ell_0$

d'après 2)

Pour cela, il suffit que :

$$\max(x(t)) < \ell_0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{eq} + d < \ell_0$$

$$\Leftrightarrow \quad d < \ell_0 - x_{eq}$$

$$\Leftrightarrow \quad d < \ell_0 - \left(\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k}\right)$$

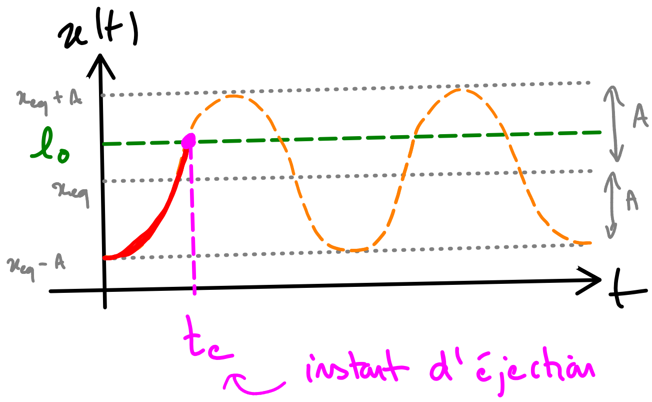
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{d < d_c \quad \text{où} \quad d_c = \frac{mg\sin\alpha}{k}}$$

⇒ Condition de "non-éjection" de la bille

AN : $\boxed{d_c = 1,1 \text{ cm}}$

À l'inverse, la bille finira par être éjectée si $d \geqslant d_c$.

5) On a bien : $d \geqslant d_c$: la bille sera donc éjectée à l'instant t_e ci-dessous.



v_e ?

À $t = t_e$, on a : $\vec{v}(t_e) = v_e \, \vec{u_x}$

De plus : $\vec{v}(t_e) = \dot{x}(t_e) \, \vec{u_x}$ en repérage cartésien

Or $\dot{x}(t) = d\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

Donc $\boxed{v_e = d\omega_0 \sin(\omega_0 t_e)}$

↳ que vaut t_e ?

On a $x(t_e) = l_0$

$$x_{eq} - d\cos(\omega_0 t_e) = l_0$$

$$l_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k} - d\cos(\omega_0 t_e) = l_0$$

$$\boxed{\cos(\omega_0 t_e) = \frac{mg\sin\alpha}{kd}}$$

⚠ puis isoler t_e grâce à $x \to \text{Arccos}\, x$?? et injecter dans l'expression de v_e ?? Beurk ! ...

Or $v_e = d\omega_0 \sin(\omega_0 t_e)$. Pour se débarasser de t_e "élégamment", on peut donc utiliser la relation fondamentale de la trigonométrie.

D'où : $v_e = d\omega_0 \sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t_e)}$

$$= \omega_0 \sqrt{d^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{mg\sin\alpha}{kd}\right)^2}$$

$$= \omega_0 \sqrt{d^2 - \left(\frac{mg\sin\alpha}{k}\right)^2}$$

$$\boxed{v_e = \left[\frac{k}{m}\left(d^2 - \left(\frac{mg\sin\alpha}{k}\right)^2\right)\right]^{1/2}}$$

AN : $\boxed{v_e = 0{,}84 \text{ m.s}^{-1}}$

Rmq : ou sinon (méthode "Beurk" évoquée précédemment)

$x(t_e) = l_0 \Rightarrow t_e = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Arccos}\left(\frac{mg\sin\alpha}{kd}\right)$

puis :

$$v_e = \dot{x}(t_e)$$

$$= d\omega_0 \sin\left[\frac{1}{\omega_0}\omega_0 \operatorname{Arccos}\left(\frac{mg\sin\alpha}{kd}\right)\right]$$

$$= d\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left[\operatorname{Arccos}\left(\frac{mg\sin\alpha}{kd}\right)\right] \Leftarrow \text{BEURK !!}$$

$$= 0{,}84 \text{ m.s}^{-1}$$

Rmq : $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1 - \cos^2 \operatorname{Arccos} x}$
$= \sqrt{1 - x^2}$

On obtiendra donc bien le même résultat littéral ...