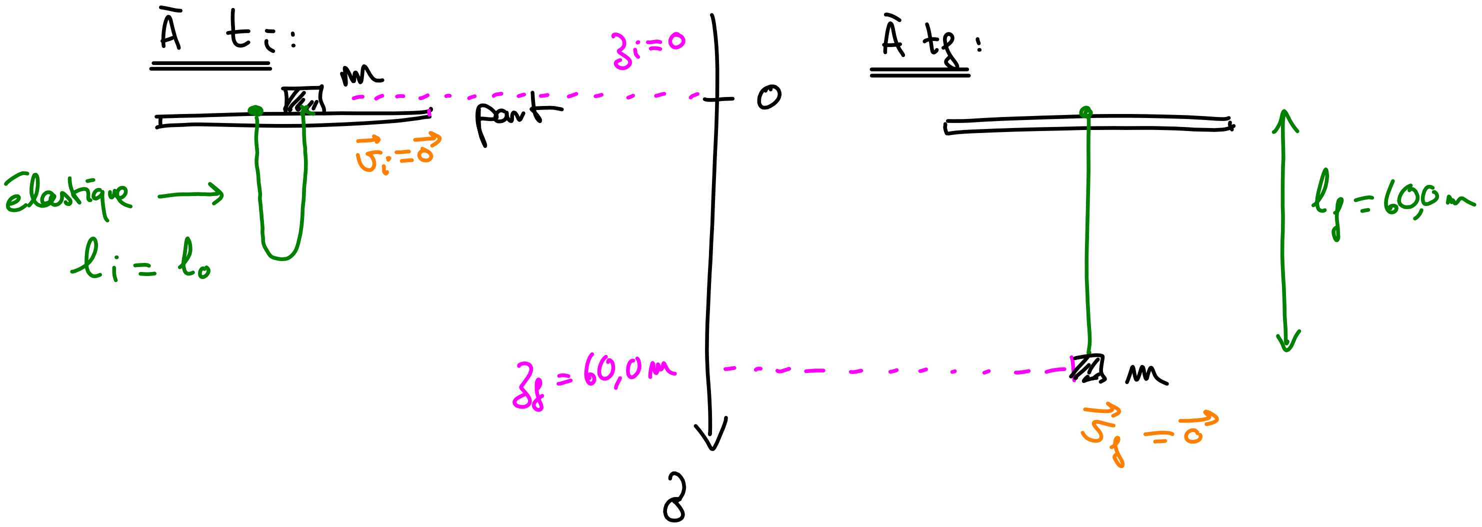
Saut à l'élastique

Référentiel d'étude : terrestre, supposé galiléen



- Initialement, l'élastique n'exerce aucune force (élastique détendu) donc $\ell_i = \ell_0$.

- Avec ce choix d'origine : $z_f = \ell_f$

1) Il n'y a que des forces conservatives : poids et force de rappel élastique.

Donc l'énergie mécanique est conservée :

$$\boxed{E_m(t_i) = E_m(t_f)}$$

D'où :

⚠ axe vers le bas !

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - mgz_i + \frac{1}{2}k(\ell_i - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 - mgz_f + \frac{1}{2}k(\ell_f - \ell_0)^2$$

où $\begin{cases} v_i = \|\vec{v}_i\| = 0 \\ v_f = \|\vec{v}_f\| = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \ell_i = \ell_0 \\ z_i = 0 \\ \ell_f = z_f \end{cases}$

D'où $$0 = -mgz_f + \frac{1}{2}k(z_f - l_0)^2 \quad (*)$$

$$\boxed{k = \frac{2mgz_f}{(z_f - l_0)^2}}$$

AN : $$k = \frac{2 \times 100 \times 9{,}81 \times 60{,}0}{(60{,}0 - 30{,}0)^2}$$

$$\boxed{k = 131 \ N.m^{-1}}$$

2| Désormais <u>m est l'inconnue</u>.

Plus m est important, plus l'altitude la plus basse z_f sera de valeur importante.
La masse critique correspond donc ici au cas où $z_f = z_{max} = 70{,}0$ m

D'où, d'après $(*)$:

$$m_c g z_{max} = \frac{1}{2}k(z_{max} - l_0)^2$$

$$\boxed{m_c = \frac{k}{2gz_{max}}(z_{max} - l_0)^2}$$

AN : $\boxed{m_c = 153 \text{ kg}}$ $\rightarrow$ ⚠ ICI, accumulation d'arrondis numériques !

Pour un résultat littéral qui ne fait intervenir que les données du PB, on remplace l'expression de k :

$$m_c = m\frac{z_f}{z_{max}}\left(\frac{z_{max} - l_0}{z_f - l_0}\right)^2 = \underline{\underline{152 \text{ kg}}} \quad \text{plutôt ...}$$

APPROFONDISSEMENT (pour les plus aguerris !...)

Nous n'avons pas montré rigoureusement qu'il fallait $m \underline{\underline{<}} m_c$.

L'altitude la plus basse atteinte par la masse est fonction de m : $z_f = f(m)$ (d'après l'observation physique)

Ainsi, m_c vérifie $z_{max} = f(m_c)$

Par ailleurs, $\boxed{\text{il faut : } z_f < z_{max}}$ $\Leftrightarrow f(m) < f(m_c)$

$\Rightarrow$ Il suffit alors de montrer que $z_f = f(m)$ est une fonction strictement croissante de m pour en déduire $m < m_c$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{montrer que } f'(m) > 0}$

» **Quelle est l'expression de $f'(m)$?**

Partons à nouveau de (*) :

$$-2mgz_f + k(z_f - l_0)^2 = 0$$

$$-2mg\,f(m) + k(f(m) - l_0)^2 = 0$$

Dérivons par rapport à m :

$$-2g\left[f(m) + m f'(m)\right] + 2k f'(m)\left(f(m) - l_0\right) = 0$$

$$f'(m)\left[k(f(m) - l_0) - mg\right] = g\,f(m)$$

$$f'(m) = \frac{g\,f(m)}{k(f(m) - l_0) - mg}$$

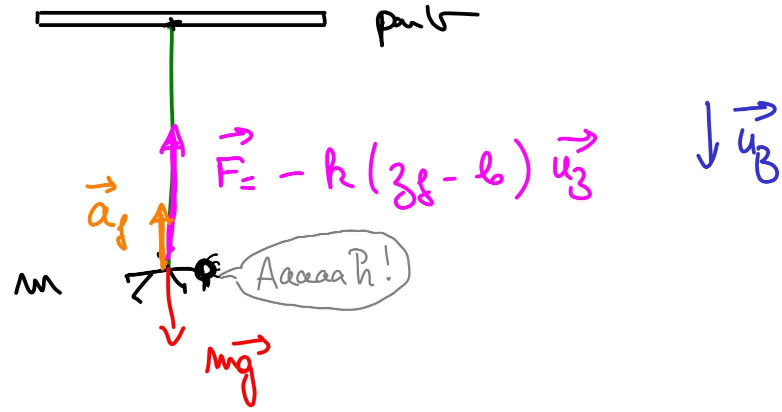
$$\boxed{f'(m) = \frac{dz_f}{dm} = \frac{g\, z_f}{k(z_f - l_0) - mg}}$$

» **A-t-on bien :** $f'(m) = \dfrac{dz_f}{dm} > 0$?

Il suffit de montrer que : $\underbrace{k(z_f - l_0)}_{\text{norme de la force élastique}} > \underbrace{mg}_{\text{norme du poids}}$

À $t = t_f$:

↳ $\vec{v_f} = \vec{0}$



Et $\vec{a_f}$ est suivant $-\vec{u_z}$ puisque la masse s'apprête à remonter vers le haut.

Or : $\vec{a_f} = \dfrac{1}{m}\left(\vec{F} + m\vec{g}\right)$ d'après la 2nde loi de Newton.

Donc, pour que $\vec{a_f}$ soit orienté vers le haut, il faut :

$$\|\vec{F}\| > \|m\vec{g}\|$$

$$k(z_f - l_0) > mg$$

$$\boxed{k(z_f - l_0) - mg > 0}$$

⇨ On a bien : $f'(m) = \dfrac{dz_f}{dm} > 0$