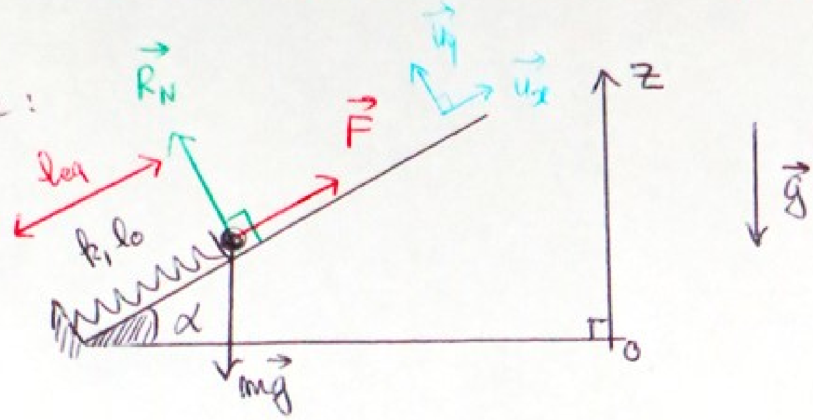
Vitesse d'éjection d'une bille de flipper

Référentiel terrestre supposé galiléen

1] À l'équilibre :

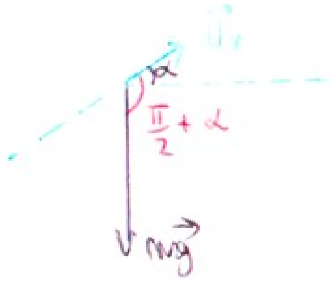


$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{R_N} = \vec{0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{F} = -k(\ell_{eq} - \ell_0)\,\vec{u_x} \\ \vec{R_N} = R_N\,\vec{u_y} \end{cases}$$

(où $R_N = \|\vec{R_N}\|$)

D'où, en projetant suivant $\vec{u_x}$:

$$-k(\ell_{eq} - \ell_0) + \underbrace{m\vec{g}\cdot\vec{u_x}}_{mg\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -mg\sin\alpha} + 0 = 0$$



Isolons ℓ_{eq} :

$$\boxed{\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k}}$$

AN : $\ell_{eq} = 13{,}88$ cm

$$\boxed{\ell_{eq} = 14 \text{ cm}}$$

2] t_e : instant d'éjection

t_i : instant initial (ressort comprimé)

La bille n'est soumise qu'à des forces conservatives.

Donc, l'énergie mécanique est conservée :

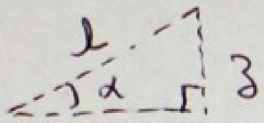
$$\boxed{E_m(t_e) = E_m(t_i)} \quad (*)$$

où $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + mgz$

(où $v = \|\vec{v}\|$)

axe Oz vers le haut

Or :



$\rightarrow \boxed{z = \ell \sin\alpha}$

et : l'éjection à t_e a lieu lorsque $\ell(t_e) = \ell_0$ (car $\vec{F}$ s'annule)

D'où : $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 + 0 + mg \underbrace{\ell_0 \sin\alpha}_{z(t_e)}$

$$= 0 + \frac{1}{2} k (\ell_i - \ell_0)^2 + mg \underbrace{\ell_i \sin\alpha}_{z(t_i)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2} m v_e^2 = mg(\ell_i - \ell_0)\sin\alpha + \frac{1}{2} k (\ell_i - \ell_0)^2}$$

Or : $\ell_i = \ell_{eq} - d$, d'après l'énoncé

$$= \ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{k} - d$$

D'où $\frac{1}{2} m v_e^2 = -\frac{(mg\sin\alpha)^2}{k} - mgd\sin\alpha + \frac{1}{2} k \left(\frac{mg\sin\alpha}{k} + d\right)^2$

$$= \frac{1}{2} k d^2 - \frac{(mg\sin\alpha)^2}{2k}$$

$$v_e^2 = \frac{k}{m} d^2 - \frac{(g\sin\alpha)^2}{k} m$$

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{k}{m} d^2 - \frac{(g\sin\alpha)^2}{k} m}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left[d^2 - \left(\frac{mg\sin\alpha}{k}\right)^2\right]}$$

AN : $\boxed{v_e = 0{,}84 \ m.s^{-1}}$