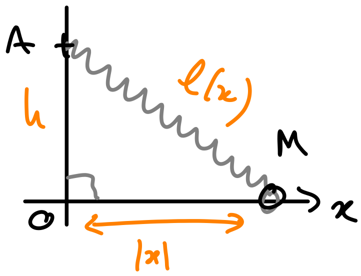
Ressort contraint

On a : $E_p(x) = \frac{1}{2} k \left[\ell(x) - \ell_0 \right]^2$

où $\ell(x) = \sqrt{h^2 + x^2}$

d'après le théorème de Pythagore.



Dérivée : $\frac{dE_p}{dx} = k \, \ell'(x) \left[\ell(x) - \ell_0 \right]$

avec $\ell'(x) = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$

D'où $$\boxed{\frac{dE_p}{dx} = kx \left[1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{h^2 + x^2}} \right]}$$

Étude des positions d'équilibre :

Il faut résoudre : $\left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x = x_{eq}} = 0$

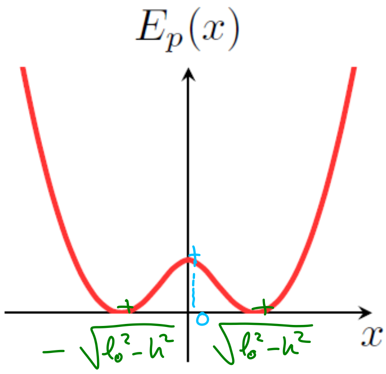
$\iff x_{eq} = 0$ ou $\frac{\ell_0}{\sqrt{h^2 + x_{eq}^2}} = 1$

$\iff x_{eq} = 0$ ou $h^2 + x_{eq}^2 = \ell_0^2$

$\iff x_{eq} = 0$ ou $\underbrace{x_{eq} = \pm \sqrt{\ell_0^2 - h^2}}$

⚠ solutions qui n'existent que si $\boxed{h < \ell_0}$

Ainsi, la COURBE 3 correspond au cas $h < \ell_0$:



Courbe 3

$\Rightarrow$ 3 positions d'équilibres

$\Rightarrow$ $x_{eq} = 0$ est instable (maximum de E_p)

$\Rightarrow$ $x_{eq} = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$ sont stables (minima de E_p)

Les courbes 1 et 2 correspondent au cas $h \geq \ell_0$

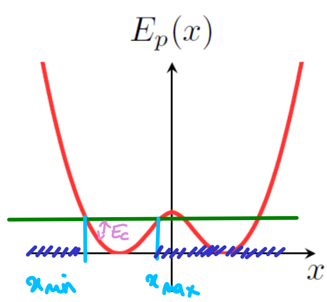
De plus $E_p(x=0) = \frac{1}{2}k(h-\ell_0)^2$ car $\ell(x=0) = h$

Ainsi : si $h = \ell_0$, $E_p(x=0) = 0$ $\Rightarrow$ COURBE 2

si $h > \ell_0$, $E_p(x=0) > 0$ $\Rightarrow$ COURBE 1

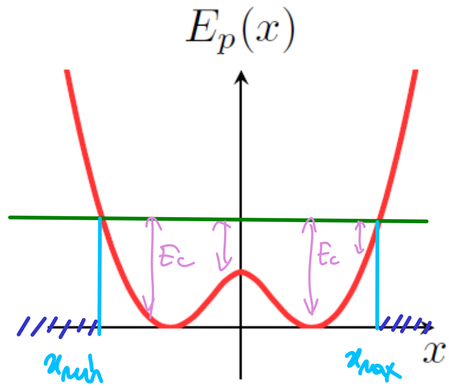
2. Cas de la COURBE 3 :

Si $E_m < E_p(x=0)$, mouvement d'oscillations bornés dans un des deux puits (cela dépend de l'état initial) :



Si $E_m > E_p(x=0)$,

mouvement d'oscillation sur l'ensemble des deux puits entre x_{min} et x_{max} :



Lors du franchissement de la barrière en $x = 0$, E_c prend une valeur minimale