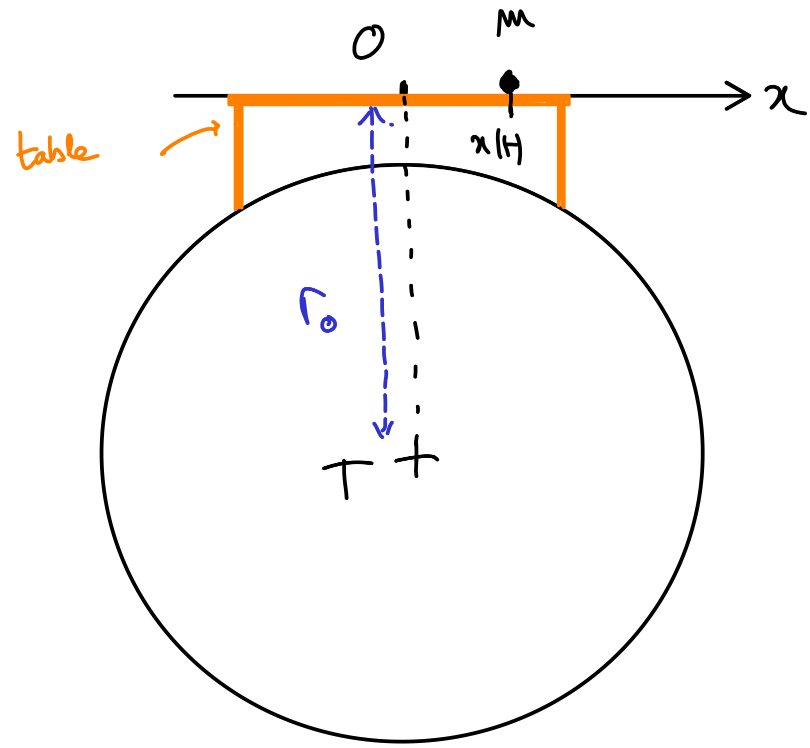
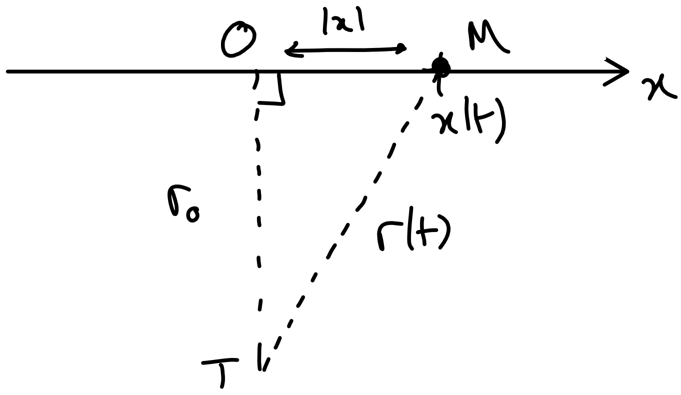
Oscillations d'une bille sur une table



(Echelles non respectées ...)

1)



On sait que : $E_p = -\dfrac{G m m_T}{r}$

<u>Or</u> $r^2 = r_0^2 + x^2$ (théorème de Pythagore)

$r = (r_0^2 + x^2)^{1/2}$

D'où $\boxed{E_p(x) = -\dfrac{G m m_T}{(r_0^2 + x^2)^{1/2}} = -G m m_T (r_0^2 + x^2)^{-1/2}}$

2) On a : $\left(r_0^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left[r_0^2\left(1 + \frac{x^2}{r_0^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$

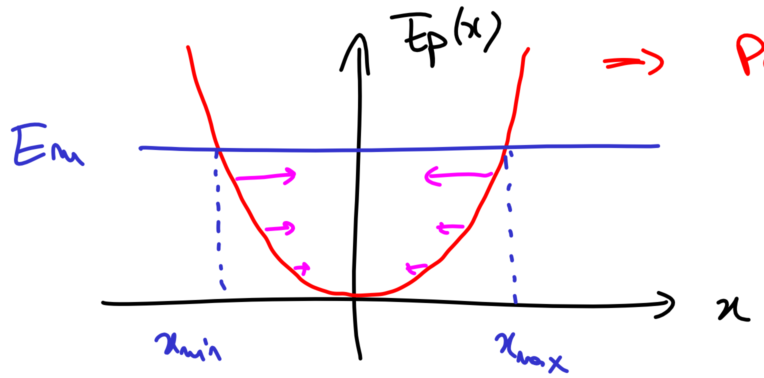
$$= r_0^{-1}\left(1 + \varepsilon\right)^{-1/2}$$

où $\varepsilon = \left(\frac{x}{r_0}\right)^2 \ll 1$, car $|x| \ll r_0$

Donc $\left(r_0^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ car $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$ si $|\varepsilon| \ll 1$

Ainsi : $E_p = -\frac{G m m_T}{r_0}\left(1 - \frac{x^2}{2 r_0^2}\right)$

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2} K x^2 + C^{te}, \quad \text{où} \quad K = \frac{G m m_T}{r_0^3}}$$



$\Rightarrow$ Puits de potentiel !

$\rightleftarrows$: sens d'action de la force conservative (attraction gravit.)

3) Il faut établir l'équation différentielle, par l'intégrale 1ère du mouvement :

On a : $E_c + E_p = E_m$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 + C^{te} = \underbrace{E_m}_{= C^{te}}$$

(mouvement conservatif)

avec $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u_x} \Rightarrow v^2 = \dot{x}^2$

D'où $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 = c^{te}$

Dérivons par rapport au temps :

$$\frac{1}{2} 2 m \ddot{x} \dot{x} + \frac{1}{2} K \dot{x} x = 0$$

$$\dot{x} \left(m \ddot{x} + K x \right) = 0 \quad , \text{ vrai } \forall t$$

Or, $\dot{x}$ n'est pas tout le temps nul.

Donc nécessairement : $m\ddot{x} + Kx = 0 \quad , \forall t$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad , \text{ où } \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Ainsi : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$K = \frac{G m m_T}{r_0^3}$

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{G m_T}}}$$

AN : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(6{,}4 . 10^6)^3}{6{,}67 . 10^{-11} \times 5{,}97 . 10^{24}}}$

$$\boxed{\begin{aligned} T_0 &= 5{,}1 . 10^3 \text{ s} \\ &= 1{,}4 \text{ h} \end{aligned}}$$

Autre méthode : la 2ème loi de Newton !

$$m\vec{a} = \underbrace{\vec{F}_{grav.}}_{= -\overrightarrow{grad}\,Ep} + \underbrace{\vec{R}_N}_{\perp \vec{u_x}}$$

Projetons suivant $\vec{u_x}$:

$$m\ddot{x} = -\overrightarrow{grad}\,Ep \cdot \vec{u_x} + 0$$

Or : $$\overrightarrow{grad}\,Ep = \frac{\partial Ep}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial Ep}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial Ep}{\partial z}\vec{u_z}$$ si $Ep = Ep(x,y,z)$

$$= \frac{dEp}{dx}\vec{u_x}$$ car $Ep = Ep(x)$ fonction de x seul

Donc $$\overrightarrow{grad}\,Ep \cdot \vec{u_x} = \frac{dEp}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}Kx^2 + C^{te}\right)$$

⚠ ici on dérive par rapport à x

$$= \frac{1}{2}K\,2x + 0$$

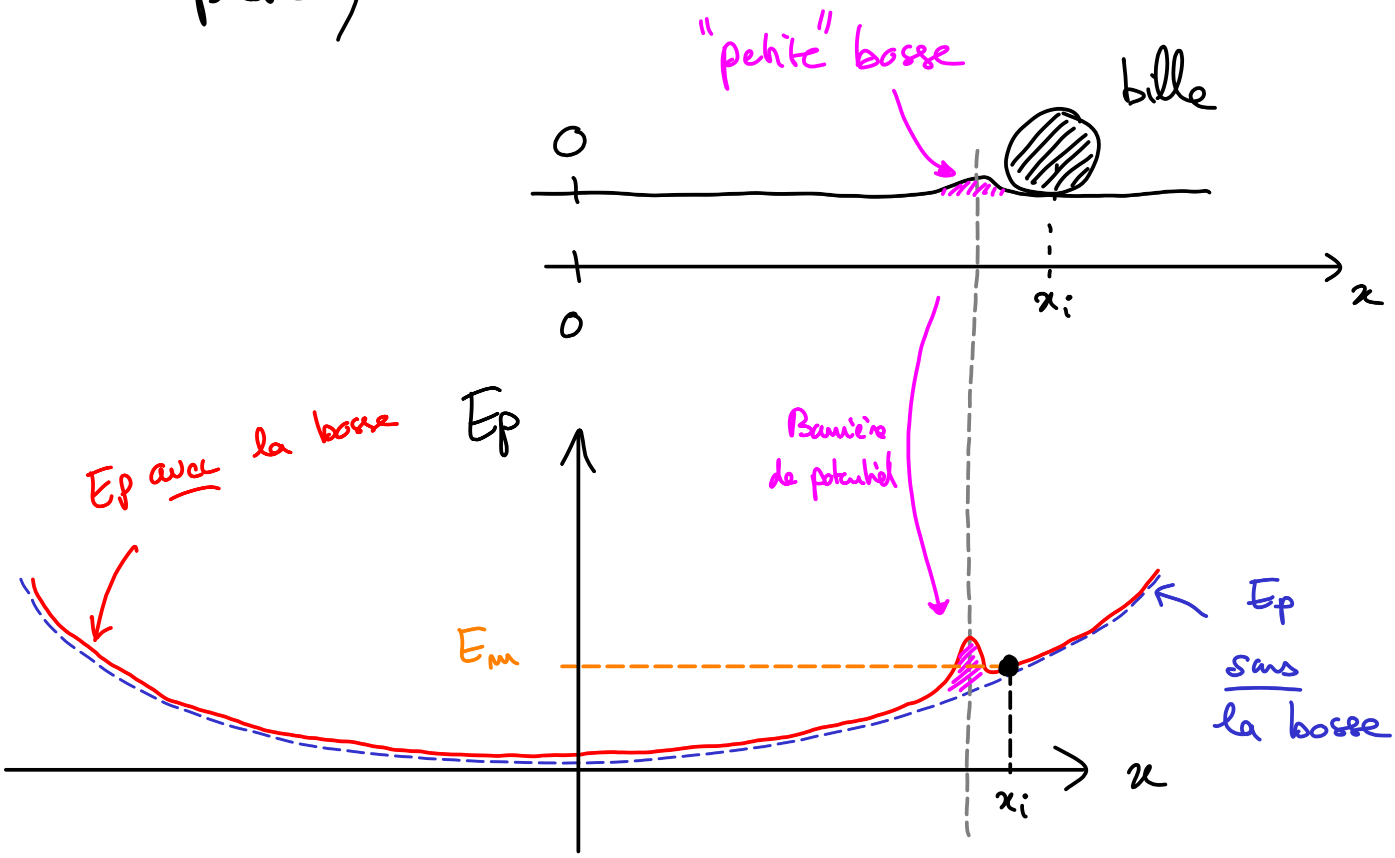
$$= Kx$$

D'où $$m\ddot{x} = -Kx$$

$$\boxed{m\ddot{x} + Kx = 0}$$

Puis, calculs identiques aux précédents...

4) Les oscillations ne sont pas observées à cause des frottements et à cause de « micro-barrières » de potentiel à très petite échelle (table non parfaitement plane)



L'énergie mécanique $E_m = Ep(x_i)$ (si pas de vitesse initiale...) n'est pas forcément suffisante pour parvenir à franchir ces barrières de potentiel.

Par ailleurs, les frottements n'aideront pas davantage dans la mesure où ils ont plutôt tendance à diminuer l'énergie mécanique.