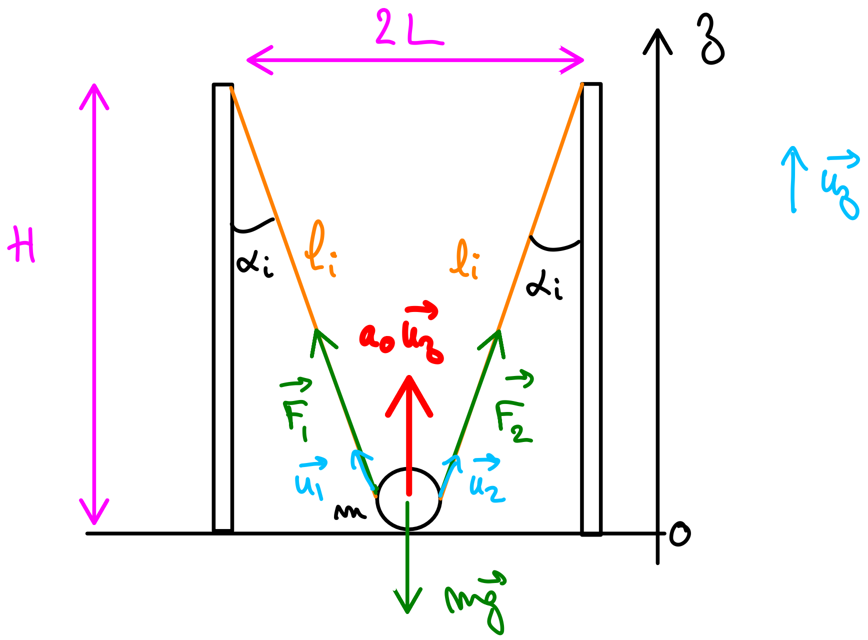
«La boule»

>> Modélisation et expression de l'accélération initiale

L'accélération ressentie sera maximale lorsque les élastiques sont tendus au maximum, donc juste au moment du lâcher de la boule :



On suppose que les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ exercées par les deux élastiques (identiques) suivent la loi de Hooke et sont caractérisées par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0.

Appliquons la 2ème loi de Newton à {sphère + 2 personnes} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m a_0 \vec{u_z} = - mg \vec{u_z} + k(\ell_i - \ell_0)\vec{u_1} + k(\ell_i - \ell_0)\vec{u_2}$$

Projetons suivant $\vec{u_z}$:

$$m a_0 = - mg + k(\ell_i - \ell_0)\vec{u_1}\cdot\vec{u_z} + k(\ell_i - \ell_0)\vec{u_2}\cdot\vec{u_z}$$

Or :

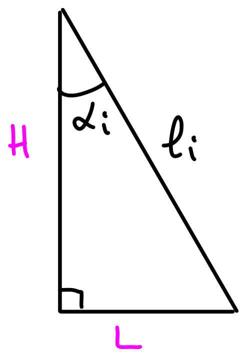
$\Rightarrow \vec{u_1}\cdot\vec{u_z} = \cos\alpha_i$. De même :

$\vec{u_2}\cdot\vec{u_z} = \cos\alpha_i$

D'où $\quad a_0 = -g + \frac{2k}{m}\left(l_i - l_0\right)\cos\alpha_i$

$$\boxed{a_0 = -g + \frac{2k}{m}\left(l_i \cos\alpha_i - l_0 \cos\alpha_i\right)}$$

Or :



$$\boxed{l_i \cos\alpha_i = H}$$

Et : $\cos\alpha_i = \frac{H}{l_i}$

$$\cos\alpha_i = \frac{H}{\sqrt{H^2 + L^2}}$$

D'où :

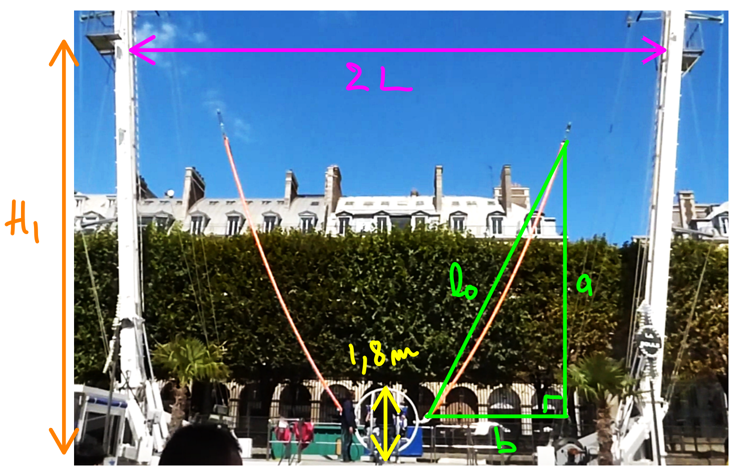
$$\boxed{a_0 = -g + \frac{2kH}{m}\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{H^2+L^2}}\right)}$$

avec $\quad g = 9{,}81\ m.s^{-2} \quad$ et $\quad m = 150\ kg + \underbrace{2 \times 75\ kg}_{\text{masse des deux personnes}}$

$$m = 300\ kg$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Il faut parvenir à estimer } H,\ L,\ l_0 \text{ et } k}$

» Estimation de l_0



On a :

$$l_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

où les longueurs a et b peuvent être estimés à l'aide d'un des gérants dont la taille présumée de 1,80 m peut servir d'échelle.

On peut ainsi estimer ℓ_0 : $\boxed{\ell_0 \simeq 8 \text{ m}}$

» Estimation de L

Avec la même photographie que précédemment et la même échelle :

$$2L \simeq 14 \text{ m}$$

$$\boxed{L \simeq 7 \text{m}}$$

» Estimation de H

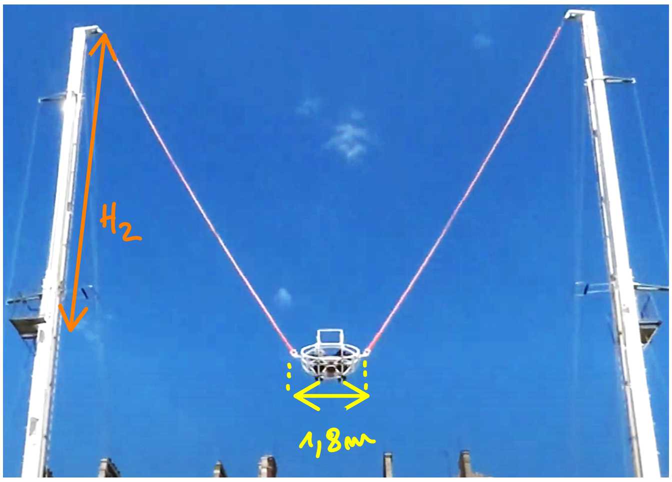
voir photo. précédente

Notons $H = H_1 + H_2$

voir ci-dessous

Avec les échelles de chaque photographies, on peut en déduire :

$$\boxed{H \simeq 17 \text{ m}}$$



» Estimation de k

Lorsque l'altitude z_{max} est atteinte à $t = t_{max}$:

$$E_m(t_i) = E_m(t_{max})$$

instant du lâcher

par conservation de l'énergie mécanique

où $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgz + 2 \times \frac{1}{2} k(\ell - \ell_0)^2$

De plus, lorsque $z = z_{max}$, les élastiques sont détendus, donc $\ell(t_{max}) = \ell_0$.

D'où :

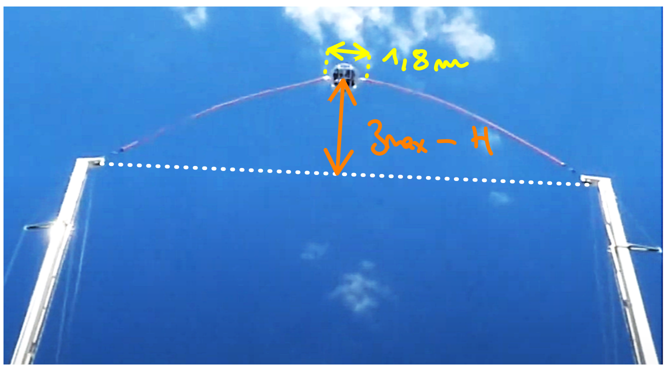
$$\frac{1}{2} m \underbrace{v_i^2}_{=0} + mg\underbrace{z_i}_{=0} + k(\ell_i - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} m \overbrace{v^2(t_{max})}^{=0} + mg z_{max} + k\underbrace{(\ell_0 - \ell_0)^2}_{=0}$$

$$k(\ell_i - \ell_0)^2 = mg z_{max}$$

$$k = \frac{mg z_{max}}{(\ell_i - \ell_0)^2}$$

$$\boxed{k = \frac{mg z_{max}}{\left(\sqrt{H^2 + L^2} - \ell_0\right)^2}}$$

» <u>Estimation de z_{max}</u>



Avec la 3ème photographie :

$$z_{max} - H \simeq 6 \text{ m}$$

D'où $\boxed{z_{max} \simeq 23 \text{ m}}$

Et donc $\boxed{k \simeq 6{,}3 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}$ d'après le résultat littéral précédent.

AINSI : l'application numérique pour a_0 donne :

$$a_0 = -9,81 + \frac{2 \times 6,3.10^2 \times 17}{300}\left(1 - \frac{8}{\sqrt{17^2+7^2}}\right)$$

$$a_0 = 30 \ m.s^{-2}$$

$\times \frac{1}{9,81}$

$$\boxed{a_0 = 3,1 \ g}$$

⚠ ce ne sont pas des grammes

au lieu des 4 g annoncés par le descriptif de l'attraction.

Etant donné le caractère assez approximatif de l'estimation des distances mises en jeu, le résultat fourni par le modèle proposé est plutôt satisfaisant !