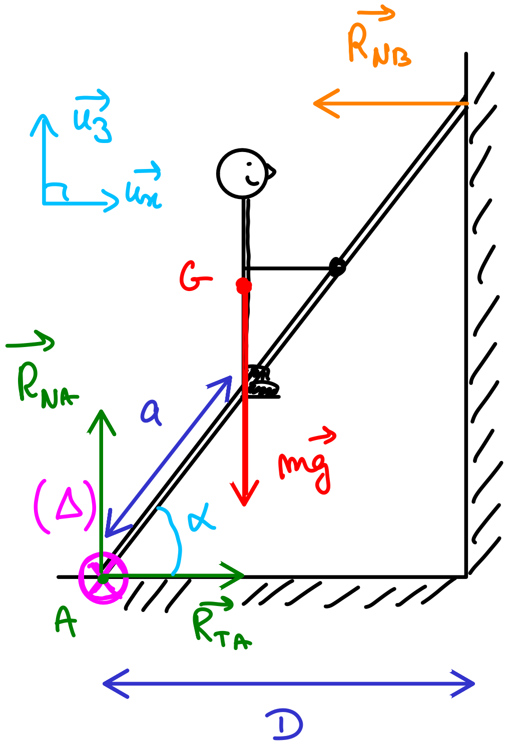
Echelle contre un mur



L = longueur de l'échelle

<u>Référentiel d'étude</u> : terrestre supposé galiléen

Notons $R_{NA} = \|\vec{R_{NA}}\|$

$R_{TA} = \|\vec{R_{TA}}\|$

$R_{NB} = \|\vec{R_{NB}}\|$

Négligeons la masse de l'échelle.

Il y a non-glissement tant que :

$$\boxed{R_{TA} \leqslant f\, R_{NA}}$$

(d'après les lois de Coulomb)

» <u>Cherchons à exprimer R_{TA} et R_{NA}.</u>

Appliquons la 2ème loi de Newton à {personne + échelle} dans le cas statique (puisqu'il y a non glissement)

$$\vec{mg} + \vec{R_{NA}} + \vec{R_{TA}} + \vec{R_{NB}} = \vec{0}$$

les forces se compensent

Projection suivant $\vec{u_z}$: $-mg + R_{NA} + 0 + 0 = 0$

$$\longrightarrow \boxed{R_{NA} = mg}$$

Projection suivant $\vec{u_x}$: $0 + 0 + R_{TA} - R_{NB} = 0$

$$\Rightarrow R_{TA} = R_{NB}$$

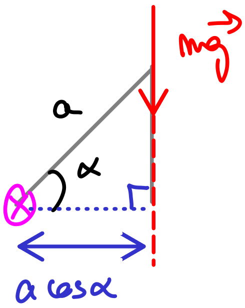
» Il faut donc à présent exprimer R_{NB}.

On peut appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à (Δ). Puisque le système est immobile, le moment cinétique L_Δ est constamment nul.

D'où
$$\underbrace{\frac{dL_\Delta}{dt}}_{=0} = \mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{NB}) + \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{NA})}_{=0} + \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{TA})}_{=0}$$

car bras de levier nuls

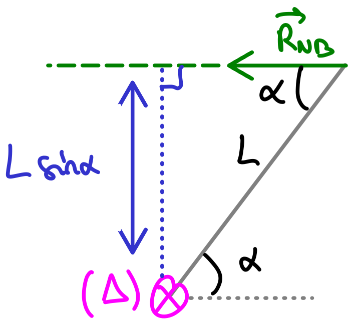
Or : Bras de levier du poids $= a\cos\alpha$



et $m\vec{g}$ agit suivant le sens direct associé à (Δ).

Donc $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = mga\cos\alpha > 0}$

Et : Bras de levier de $\vec{R}_{NB} = L\sin\alpha$



et $\vec{R}_{NB}$ agit suivant le sens indirect associé à (Δ).

Donc $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_{NB}) = -R_{NB}L\sin\alpha < 0}$

Ainsi, d'après le théorème du moment cinétique :

$$mga\cos\alpha = R_{NB}L\sin\alpha \quad \text{avec } R_{NB} = R_{TA}$$

D'où
$$\boxed{R_{TA} = \frac{mga}{L\tan\alpha}}$$

AINSI $\quad R_{TA} \leqslant f R_{NA}$

$$\iff \frac{mga}{L\tan\alpha} \leqslant f mg$$

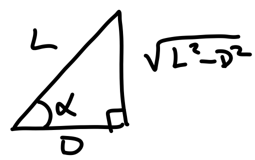
$$\iff \tan\alpha \geqslant \frac{a}{fL}$$

$$\iff \boxed{\alpha \geqslant \mathrm{Arctan}\left(\frac{a}{fL}\right)} \implies$$ dépend de la de la distance a !

Il vaut mieux choisir le plus grand majorant possible obtenu pour $a = L$ (lorsque le bricoleur est tout en haut de l'échelle).

D'où $$\boxed{\alpha \geqslant \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{f}\right)}$$

$$\iff \tan(\alpha) \geqslant \frac{1}{f}$$



$$\iff \frac{\sqrt{L^2-D^2}}{D} \geqslant \frac{1}{f}$$

$$\iff f^2(L^2-D^2) \geqslant D^2$$

$$\iff D^2(1+f^2) \leqslant f^2L^2$$

$$\iff \boxed{D \leqslant \frac{fL}{\sqrt{1+f^2}}}$$

distance du pied de l'échelle par rapport au mur