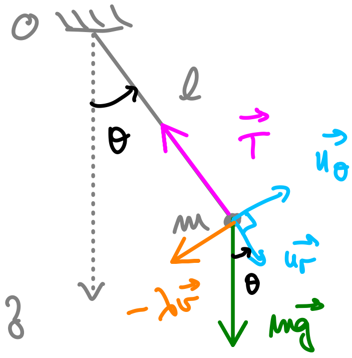
Pendule simple amorti

Référentiel d'étude : terrestre, supposé galiléen

1) 1ère MÉTHODE : avec la 2ème loi de Newton



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \underbrace{\vec{f}}_{= -\lambda\vec{v}} + \vec{T}$$

où $\vec{a} = \begin{pmatrix} -\ell\dot{\theta}^2 \\ \ell\ddot{\theta} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$

M^{vt} circulaire de rayon ℓ

et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell\dot{\theta} \end{pmatrix}$

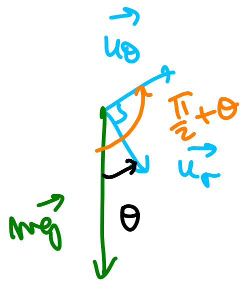
Projetons suivant $\vec{u_\theta}$:

$$m\vec{a}\cdot\vec{u_\theta} = m\vec{g}\cdot\vec{u_\theta} - \lambda\vec{v}\cdot\vec{u_\theta} + \vec{T}\cdot\vec{u_\theta}$$

$$m\,\ell\ddot{\theta} = mg\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) - \lambda\ell\dot{\theta} + 0$$

car $\vec{T} \perp \vec{u_\theta}$

car



Or : $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$

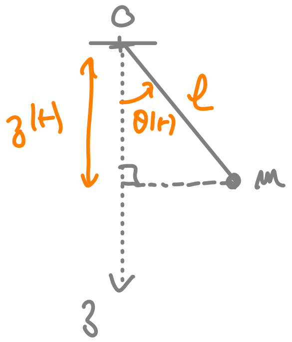
D'où $$m\ell\ddot{\theta} + \lambda\ell\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

2ème MÉTHODE : Par l'intégrale 1ère du mouvement

⚠ axe Oz vers le bas

On a : $$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - mgz$$



où $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \ell^2\dot{\theta}^2$ et $z = \ell\cos\theta$

D'où : $$E_m = \frac{1}{2} m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta$$

Or, d'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \text{puissance des forces non-conservatives}$$

$$= \mathcal{P}(-\lambda\vec{v})$$

$$\frac{1}{2} m\ell^2 \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} - mg\ell\frac{d\cos\theta}{dt} = -\lambda\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{1}{2} m\ell^2\, 2\ddot{\theta}\dot{\theta} - mg\ell(-\dot{\theta}\sin\theta) = -\lambda\ell^2\dot{\theta}^2$$

D'où $$\dot{\theta}\left(m\ell\ddot{\theta} + \lambda\ell\dot{\theta} + mg\sin\theta\right) = 0,$$ vrai $\forall t$

Or $\dot{\theta}(t)$ n'est pas tout le temps nul.
Donc nécessairement :

$$m\ell\ddot{\theta} + \lambda\ell\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

(On retrouve bien la même équation !)

Dans le cas d'oscillations de faible amplitude :

$|\theta| \ll 1$ ($\Leftrightarrow \theta$ proche de 0)

D'où $\sin\theta \simeq \theta$ et donc :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

2) Écrivons l'équ. diff. sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$ $\Rightarrow$ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 1{,}42\ s$

période propre (sans amortissement)

et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$ $\Rightarrow$ $Q = \frac{m}{\lambda}\omega_0$

$$\boxed{Q = \frac{m}{\lambda}\sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

AN : $Q = \frac{50.10^{-3}}{3{,}5.10^{-3}}\sqrt{\frac{9{,}81}{50.10^{-2}}}$

$\boxed{Q = 63}$ $\Rightarrow$ $Q > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Régime pseudo-périodique

Pseudo période ?

On a : $\omega_{pp} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ (cours)

D'où : $T_{pp} = \frac{2\pi}{\omega_{pp}}$

$$T_{pp} = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}$$

$$T_{pp} = T_0\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}$$

$\frac{1}{4Q^2} \ll 1$

et $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1+\alpha\varepsilon$

si $|\varepsilon| \ll 1$

$$T_{pp} \simeq T_0\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4Q^2}\right)\right]$$

(ici $\varepsilon = -\frac{1}{4Q^2}$

et $\alpha = -\frac{1}{2}$)

$$T_{pp} \simeq T_0\left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right)$$

AN : $T_{pp} \simeq 1{,}42\left(1 + \frac{1}{8\times 63^2}\right)$

$$\boxed{T_{pp} \simeq 1{,}42 \text{ s}}$$

Rmq : $T_{pp} \simeq T_0$ car $\frac{1}{8Q^2} \ll 1$

3) Résolution de $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Eq. avec 2^{nd} membre nul donc $\theta(t) = \theta_h(t)$

Puisque $Q > \frac{1}{2}$, la solution de l'équation homogène est de la forme :

$$\theta(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left[\alpha\cos(\omega_{pp}t) + \beta\sin(\omega_{pp}t)\right]$$

Déterminons α et β ...

... à l'aide des conditions initiales $\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \dfrac{v_0}{\ell} \end{cases}$

car $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u_\theta}$

et $\vec{v}(0) = \ell\, \dot{\theta}(0)\, \vec{u_\theta}$

Tout d'abord :

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow e^0 \left[\alpha \cos(0) + \beta \sin(0) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0} \Rightarrow \theta(t) = \beta e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(\omega_{pp} t)$$

Par ailleurs :

$$\dot{\theta}(t) = \beta \left[-\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(\omega_{pp} t) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \omega_{pp} \cos(\omega_{pp} t) \right]$$

Donc $\dot{\theta}(0) = \dfrac{v_0}{\ell} \Rightarrow \beta \left[0 + \omega_{pp} \right] = \dfrac{v_0}{\ell}$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{v_0}{\ell \omega_{pp}}}$$

FINALEMENT :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{\ell \omega_{pp}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin(\omega_{pp} t)}$$

4) Durée du régime transitoire :

le facteur exponentiel $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} = e^{-t/\tau}$ décroît avec un temps caractéristique $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$

Donc la durée du régime est d'environ :

$$5\tau = \frac{10Q}{\omega_0} = 10Q\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 142\ \text{s} \simeq \boxed{2{,}4\ \text{min}}$$

cours sur les éq. diff du 2nd ordre

5] On pourra observer $Q = 63$ oscillations environ.

(très approximatif ...)

Les oscillations sont donc très peu amorties.