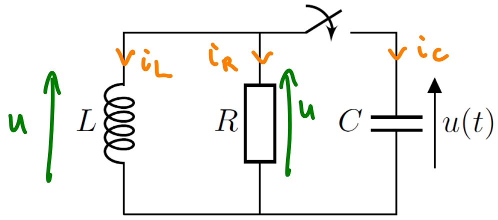
Circuit RLC parallèle

Introduisons les notations ci-contre.



1) État initial $\Rightarrow$ que valent $u(0^+)$ et $\dot{u}(0^+)$?

$u(0^+) = u(0^-)$ par continuité de u

$\boxed{u(0^+) = U_0}$ où $U_0 = 10\,V$

De plus $\dot{u}(0^+) = \dfrac{i_C(0^+)}{C}$

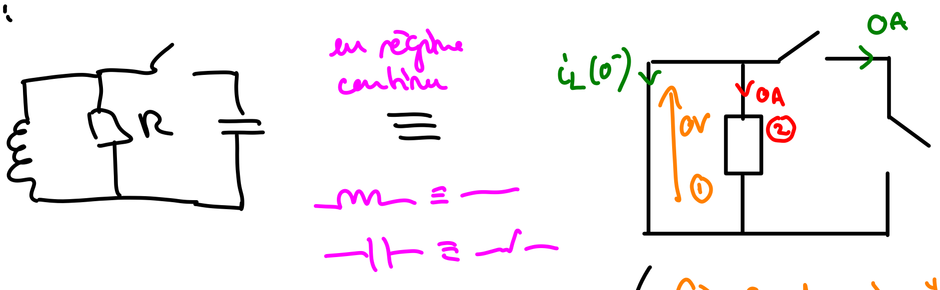
Or d'après la loi des noeuds :

$$i_C(0^+) + i_R(0^+) + i_L(0^+) = 0$$

par continuité de i_L

$$C\dot{u}(0^+) + \frac{u(0^+)}{R} + i_L(0^-) = 0$$

On peut déterminer $i_L(0^-)$ à l'aide du circuit équivalent en régime continu, régime atteint pour $t<0$ d'après l'énoncé :



(① Court-circuit de la bobine
② d'après la loi d'Ohm)

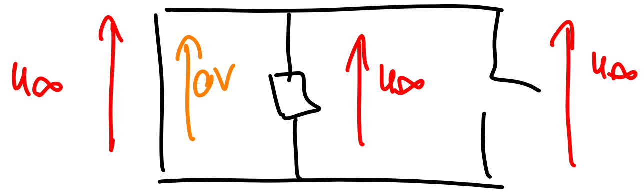
D'où $i_L(0^-) = 0$ d'après la loi des noeuds

Ainsi $C\dot{u}(0^+) + \dfrac{U_0}{R} \Rightarrow$ $\boxed{\dot{u}(0^+) = -\dfrac{U_0}{RC}}$

Rmq : $\dot{u}(0^+) < 0 \Rightarrow u$ diminue initialement $\Rightarrow$ le condensateur se décharge initialement...

État final :

Circuit équivalent en régime continu pour $t > 0$:



D'où $\boxed{u_\infty = 0}$

2) Effectuons un bilan de puissance à partir de la loi des noeuds :

$$i_C + i_L + i_R = 0$$

$$u i_C + u i_L + u i_R = 0$$

$i_C = C\dot{u}$

$u = L\dfrac{di_L}{dt}$

$u = R i_R$

$$C u \dot{u} + L i_L \frac{di_L}{dt} + R i_R^2 = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}Cu^2}_{E_C} + \underbrace{\tfrac{1}{2}L i_L^2}_{E_L}\Big) = -R i_R^2 < 0}$$

↳ L'énergie stockée $E_C + E_L$ ne peut donc que diminuer à cause de l'effet Joule, et elle tend vers 0 puisque $\begin{cases} E_C \geq 0 \\ E_L \geq 0 \end{cases}$

3) D'après la loi des noeuds :

$$i_L + i_R + i_C = 0$$

$$i_L + \frac{u}{R} + C\dot{u} = 0$$

Dérivons par rapport au temps pour pouvoir expliciter $u = L\dfrac{di_L}{dt}$:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{\dot{u}}{R} + C\ddot{u} = 0$$

$$\frac{u}{L} + \frac{\dot{u}}{R} + C\ddot{u} = 0$$

$\frac{1}{C} \times$ $\times \frac{1}{C}$

$$\ddot{u} + \frac{1}{RC}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$$

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0}$$

où $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC} \Rightarrow Q = RC\omega_0$

$$\Rightarrow \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

⚠ Ce n'est pas la même expression que pour le circuit RLC série

4) De quel type de régime du 2nd ordre s'agit-il ?

$$Q = 500\sqrt{\frac{0,10.10^{-6}}{100.10^{-3}}}$$

$$Q = 0,50$$

Il s'agit donc du régime critique $(Q = \frac{1}{2})$

(En toute rigueur :
c'est faux car $Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow Q = 0,5000000\ldots$ une infinité de 0 !!
L'incertitude sur R, L et C entraîne nécessairement une incertitude sur Q.
Q ne peut donc pas être rigoureusement égal à $\frac{1}{2}$ ...)

D'où $u(t) = u_H(t)$ (pas de solution particulière car 2nd membre nul)

$$\boxed{u(t) = (\lambda + \mu t)\, e^{-\omega_0 t}}$$

<u>Déterminons λ et μ</u>

$$u(0^+) = U_0 \Rightarrow (\lambda + 0)e^0 = U_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = U_0}$$

De plus :

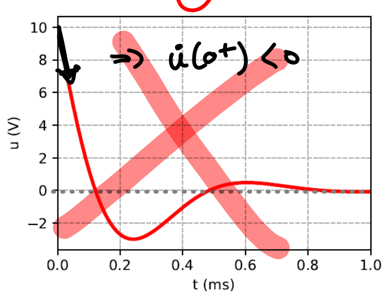
$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \mu e^{-\omega_0 t} + (\lambda + \mu t)(-\omega_0 e^{-\omega_0 t}) \\ \dot{u}(0^+) = -\dfrac{U_0}{RC} \end{cases}$$

D'où $$\mu e^0 - \underbrace{\lambda}_{=U_0} \omega_0 e^0 = -\frac{U_0}{RC}$$

$$\boxed{\mu = U_0 \left(\omega_0 - \frac{1}{RC}\right)}$$

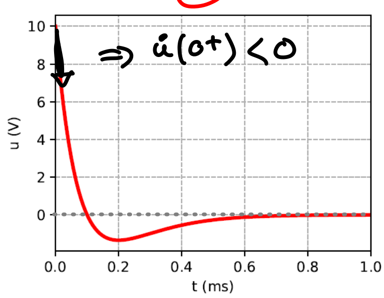
5)

1



Conditions initiales correctes mais on observe une oscillation autour de u_∞. Pourtant Q n'est pas supérieur à 1/2

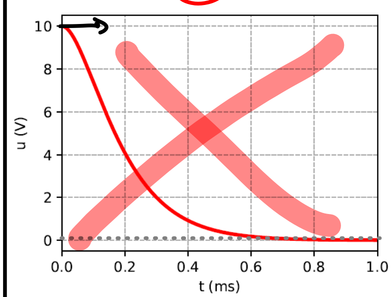
2



Conditions initiales correctes. Pas d'oscillations autour de u_∞

$\dot{u}(0^+) = 0$

3



Conditions initiales incorrectes.

6) Dans l'expression de $u(t)$, le facteur d'amortissement $e^{-\omega_0 t}$ est de la forme $e^{-\frac{t}{\tau}}$

où $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

$= \sqrt{LC}$

$\tau = 1{,}0.10^{-4}\,s$

$= 0{,}10\,ms$

Au bout de $5\tau = 0{,}50\,ms$, $e^{-\omega_0 t} \simeq 0$.

à 1% près.

Considérons que le régime est terminé à partir de là.
C'est plutôt cohérent avec le tracé :