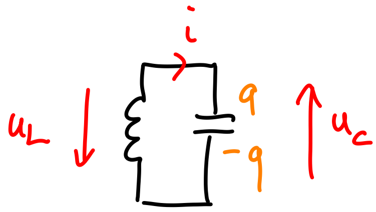
Circuit LC

1]



Loi des mailles :

$$u_C + u_L = 0$$

$q = Cu_C$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

Or $\quad i = C\dfrac{du_C}{dt}$ $\quad$ $Cu_C = q$

$$= \frac{dq}{dt}$$

D'où

$$\frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0$$

$$\boxed{\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad , \quad \text{où} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

2] Equation caractéristique :

$$\boxed{r^2 + \omega_0^2 = 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = -\omega_0^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{r = \pm j\omega_0}$$

INUTILE de passer par le discriminant ici !

(on pourrait mais c'est plus long ...)

D'où :

$$q(t) = \lambda e^{j\omega_0 t} + \mu e^{-j\omega_0 t}$$

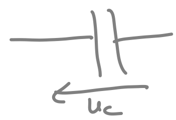
$$q(t) = \lambda\left[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)\right] + \mu\left[\cos(-\omega_0 t) + j\sin(-\omega_0 t)\right]$$

$$= \underbrace{(\lambda+\mu)}\cos(\omega_0 t) + \underbrace{j(\lambda-\mu)}\sin(\omega_0 t)$$

$$\boxed{q(t) = \alpha\cos(\omega_0 t) + \beta\sin(\omega_0 t)}$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (constantes réelles car $q(t) \in \mathbb{R}$)

3] On a : $q(0^+) = q(0^-)$ — par continuité de $u_c(t)$ et donc de $q(t) = C u_c(t)$



$$\alpha \times 1 + \beta \times 0 = q_0$$

$$\boxed{\alpha = q_0}$$

De plus : $i(0^+) = i(0^-)$ — par continuité de $i(t)$

$$C\,\dot{u}_c(0^+) = 0$$

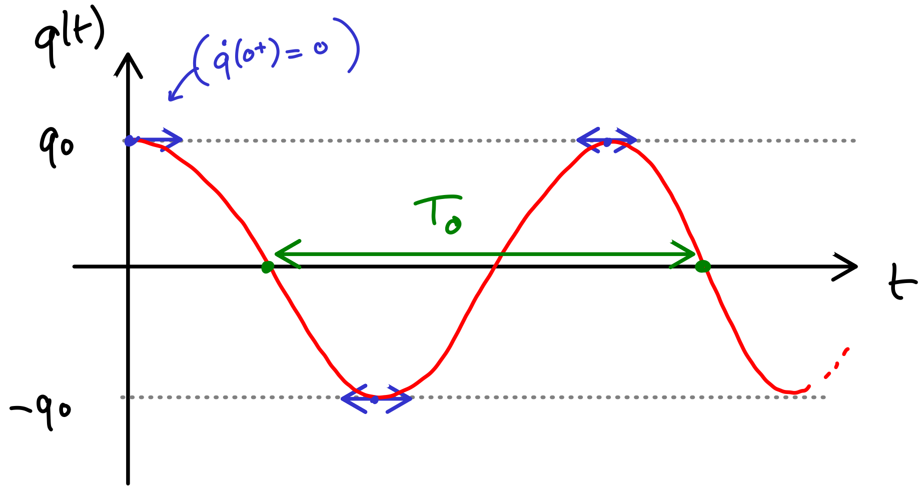
$$\boxed{\dot{q}(0^+) = 0}$$

Or : $\dot{q}(t) = -\alpha\omega_0\sin(\omega_0 t) + \beta\omega_0\cos(\omega_0 t)$

D'où, $\dot{q}(0^+) = 0$

$$\Rightarrow -\alpha\omega_0 \times 0 + \beta\omega_0 \times 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

FINALEMENT : $\boxed{q(t) = q_0\cos(\omega_0 t)}$ $\Rightarrow$ oscillations de charges !!



Rmq : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$= 2\pi\sqrt{LC}$

4] On sait que : $E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$

$u_c = \frac{q}{C}$

$= \frac{q^2}{2C}$

D'où $E_c = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t)$

$$\boxed{E_c = E_0 \cos^2(\omega_0 t)}$$

De plus :

$E_L = \frac{1}{2} L i^2$ avec $i = C\dot{u}_c$

$= \dot{q}$

$= -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

D'où :

$E_L = \frac{1}{2} L\omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$E_L = \frac{q_0^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t)$

$$\boxed{E_L = E_0 \sin^2(\omega_0 t)}$$

$\begin{cases} E_L(0) = 0 \\ E_c(0) = E_0 \end{cases} \Rightarrow$ [E_0 représente l'énergie totale stockée dans le circuit à l'état initial.]

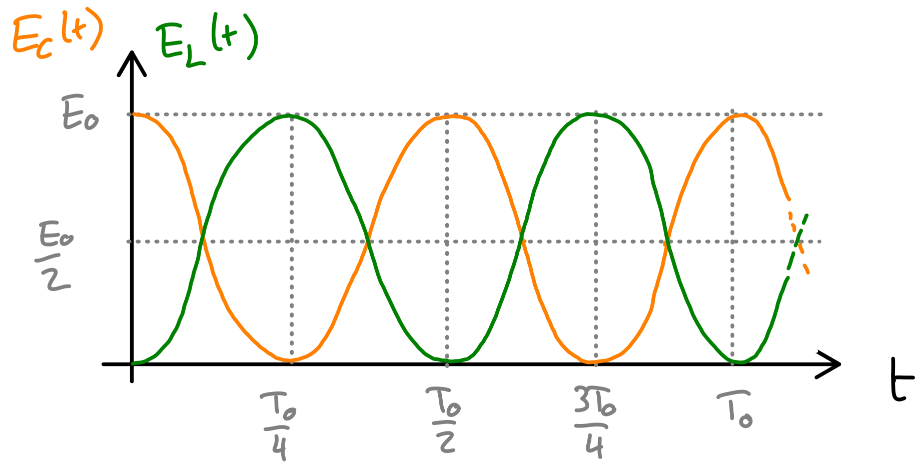
Représentation graphique :

au préalable, utilisons $\begin{cases} \cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a) \\ \sin^2(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a) \end{cases}$

D'où $\begin{cases} E_c = \frac{E_0}{2} + \frac{E_0}{2}\cos(2\omega_0 t) \\ E_L = \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{2}\cos(2\omega_0 t) \end{cases}$ → de période : $\frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{T_0}{2}$

$\begin{cases} E_c(t) \in [0, E_0] \\ E_L(t) \in [0, E_0] \end{cases}$

et $E_L = E_0 - E_c$



5] On constate que : $\boxed{E_c(t) + E_L(t) = E_0 = \text{constante}}$

[L'énergie totale n'est jamais « perdue » par le circuit.]

Cela n'aurait pas été le cas si on avait tenu compte de phénomènes résistifs (résistance interne de la bobine, des fils, de l'isolant du condensateur, ... ⇒ dissipation d'énergie par effet Joule)

Il n'était pas utile d'effectuer tout le travail de mise en équation, résolution, ... pour montrer que $E_C(t) + E_L(t) =$ constante.

EN EFFET :

$$u_C + u_L = 0$$

$$\Rightarrow u_C i + u_L i = 0$$

$$\Rightarrow u_C C \frac{du_C}{dt} + i L \frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2} C u_C^2}_{E_C} + \underbrace{\frac{1}{2} L i^2}_{E_L} \right) = 0$$

$$\Rightarrow E_C + E_L = \text{constante}$$