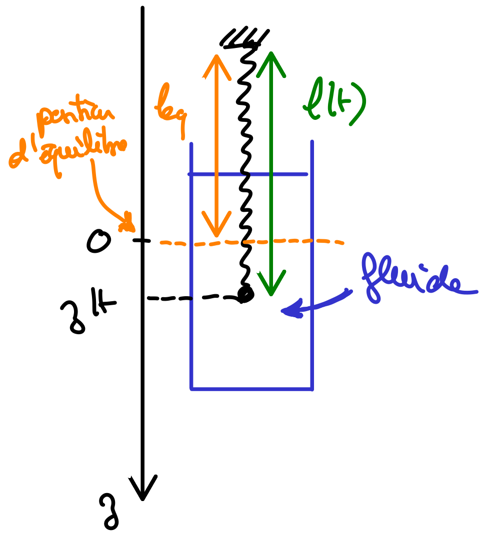
Mesure d'un coefficient de viscosité

Les seules données que l'on peut exploiter sont de nature graphique.

$\boxed{\text{Il faut donc disposer d'un modèle permettant de décrire la fonction } z(t) \text{ observée expérimentalement.}}$

En confrontant la solution obtenue par ce modèle à à l'expérience, on pourra en déduire une mesure de η.



Réf. d'étude : terrestre supposé galiléen

D'après le tracé, $z(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \underline{\underline{z_{eq} = 0}}$

D'où le choix de l'origine de l'axe Oz ci-contre :

D'après la 2ème loi de Newton :

$$m\vec{a} = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{poids}} + \underbrace{\left(-\rho V_{bille}\,\vec{g}\right)}_{\text{poussée d'Archimède}} + \underbrace{\vec{F_{ee}}}_{\text{force de rappel élastique}} + \underbrace{\left(-\lambda\vec{v}\right)}_{\text{frottements fluides}}$$

En projetant suivant $\vec{u_z}$ et avec $l = l_{eq} + z$, on obtient :

$$m\ddot{z} = \left(m - \rho V_{bille}\right) g - k\left(l_{eq} + z - l_0\right) - \lambda\dot{z}$$

$$\boxed{m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = \left(m - \rho V_{bille}\right) g + k\left(l_0 - l_{eq}\right)} \quad (*)$$

Or à l'équilibre $\begin{cases} z(t) = z_{eq} \\ \dot{z} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$

D'où $0 + 0 + 0 = \left(m - \rho V_{bille}\right) g + k\left(l_0 - l_{eq}\right)$

Ainsi (*) devient : $m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0}$ où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{\lambda}\sqrt{km}}$

AINSI Il faut pouvoir estimer Q pour en déduire $\lambda = 6\pi R\eta$ et donc en déduire η

Le régime observé est pseudopériodique. Donc $Q > \frac{1}{2}$.
La solution est de la forme :

$$z(t) = Ae^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\cos(\omega_{pp}t + \varphi)$$

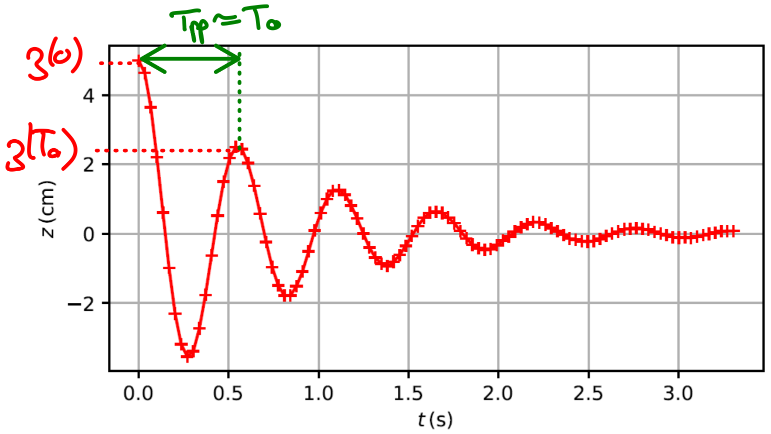
où $$\omega_{pp} = \omega_0 \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}_{\simeq 0,995 \text{ pour } Q = 5}$$

Puisque $\underbrace{Q \simeq 5}_{\text{nombre approximatif d'oscillations observées}}$, on peut considérer que :

$$\omega_{pp} \simeq \omega_0$$

Ainsi, l'influence de Q intervient essentiellement dans le facteur d'amortissement exponentiel $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$.

Pour cela, on peut mesurer $z(t=0)$ et $z(T_0)$.
En effet :
$$\begin{cases} z(t=0) = A\cos(\varphi) \\ z(t=T_0) = Ae^{-\frac{\omega_0 T_0}{2Q}}\cos(\omega_0 T_0 + \varphi) \end{cases}$$



Le rapport donne : (avec $\omega_0 T_0 = 2\pi$)

$$\frac{z(0)}{z(T_0)} = e^{\frac{\pi}{Q}}$$

D'où :

$$\frac{\pi}{Q} = \ln\left(\frac{z(0)}{z(T_0)}\right)$$

(grandeur appelé décrément logarithmique. Souvent notée δ de sorte que $z(T_{pp}) = z(0)e^{-\delta}$ ...)

On peut mesurer le rapport en effectuant le rapport des longueurs correspondantes mesurées à la règle. On trouve ainsi :

$$Q = \frac{\pi}{\ln\left(z(0)/z(T_0)\right)}$$

$$Q = \frac{\pi}{\ln(2,0)}$$

$$\boxed{Q = 4,5}$$

Or, $$Q = \frac{1}{6\pi R\eta}\sqrt{km}$$

On ne connaît pas la valeur de k mais elle peut être déduit de la mesure de :

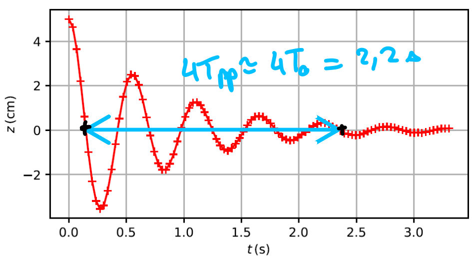
$$T_{pp} \simeq T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k} = \frac{2\pi\sqrt{m}}{T_0}$$

D'où $$Q = \frac{1}{6\pi R\eta}\,\frac{2\pi}{T_0}\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}$$

$$\boxed{\eta = \frac{m}{3QRT_0}}$$

avec $4T_0 \simeq 2,2\,s$



AN :

$$\eta = \frac{38.10^{-3}}{3\times 4,5\times 1,0.10^{-2}\times \frac{2,2}{4}}$$

$$\eta = 0,51\ kg.m^{-1}.s^{-1}$$