

CHAPITRE OSC2 - Partie A : Résonance en position ou en charge

⇒ LARGEUR DE LA RÉSONANCE DANS LE CAS D'UN FAIBLE AMORTISSEMENT
(démonstration non-exigible mais **résultat final à retenir**)

► Expression de A_{max}

On a déjà obtenu l'expression de l'amplitude de sortie :

$$A(x) = \frac{Z_e}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

et on a également déjà montré qu'il existait un maximum $A_{max} = A(x_r)$, en $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ (pulsation réduite de résonance).

$$\begin{aligned} A_{max} &= \frac{Z_e}{\sqrt{(1 - (1 - \frac{1}{2Q^2}))^2 + \frac{1}{Q^2}(1 - \frac{1}{2Q^2})}} \\ A_{max} &= \frac{Z_e}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}} \\ A_{max} &= \frac{Z_e}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}} \end{aligned}$$

► Expression des pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2}

Cherchons les pulsations réduites de coupure satisfaisant (par définition) :

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{A_{max}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{Z_e}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Z_e}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}} \\ \Leftrightarrow (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} &= 2 \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} \right) \\ \Leftrightarrow x^4 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right) x^2 + \left(1 - \frac{2}{Q^2} + \frac{1}{2Q^4} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Dans la suite, on s'intéresse au cas d'un faible amortissement $\Leftrightarrow Q \gg 1 \Leftrightarrow \frac{1}{Q} \ll 1$. Dans l'expression du monôme de degré 0, on peut alors négliger le terme en $\frac{1}{Q^4}$ qui tend plus rapidement vers 0 que le terme en $\frac{1}{Q^2}$. L'équation précédente devient donc :

$$X^2 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right) X + \left(1 - \frac{2}{Q^2} \right) = 0$$

en posant $X = x^2$.

Le discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{1}{Q^2} - 2 \right)^2 - 4 \left(1 - \frac{2}{Q^2} \right) \\ &= \frac{1}{Q^4} - \frac{4}{Q^2} + 4 - 4 + \frac{8}{Q^2} \end{aligned}$$

En négligeant à nouveau le terme en $\frac{1}{Q^4}$, on obtient $\Delta \simeq \frac{4}{Q^2}$. Les solutions sont donc :

$$X \simeq \frac{-\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$X \simeq 1 \pm \frac{1}{Q} - \frac{1}{2Q^2}$$

On peut négliger le terme en $\frac{1}{Q^2}$ qui tend plus rapidement vers 0 que le terme en $\frac{1}{Q}$.

D'où, avec $x = X^{1/2}$ (NB : on cherche des solutions $x > 0 \dots$) :

$$x \simeq \left(1 \pm \frac{1}{Q}\right)^{1/2}$$

Or, puisque $\left|\frac{1}{Q}\right| \ll 1$, on peut utiliser le développement limité $(1 + \epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$, vrai tant que $|\epsilon| \ll 1$ (càd au voisinage de $\epsilon = 0$) :

$$x \simeq 1 \pm \frac{1}{2Q}$$

On obtient donc une expression approchée des pulsations réduites de coupure :

$$x_{c1} \simeq 1 - \frac{1}{2Q} \quad x_{c2} \simeq 1 + \frac{1}{2Q}$$

Et donc, avec $\omega = x\omega_0$, on obtient les pulsations de coupure dans le cas $Q \gg 1$ (rappel) :

$$\omega_{c1} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \quad \omega_{c2} \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$$

On en déduit la largeur de résonance $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$:

$$\Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q}, \quad \text{si } Q \gg 1 \text{ (faible amortissement)}$$