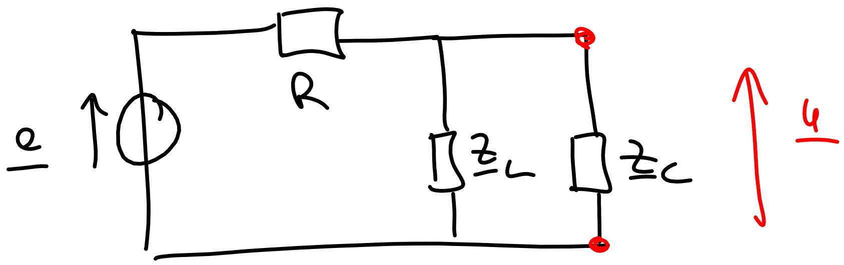
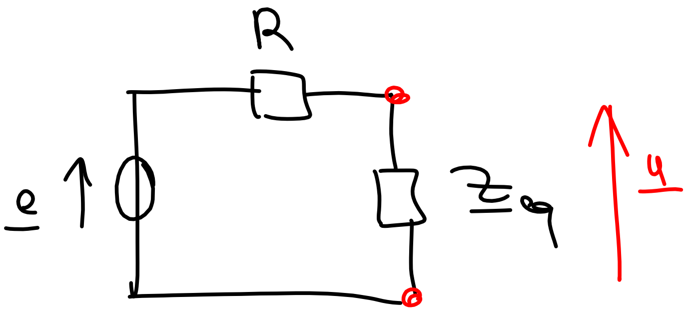
Résonance en tension du circuit bouchon



En RSF, notons $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u)$

1] Expression de U

Circuit équivalent :



où $\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_L + \underline{Y}_C$

D'où, d'après la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_{eq} \times \underline{Y}_{eq}}{(\underline{Z}_{eq} + R) \times \underline{Y}_{eq}} \, \underline{e}$$

$$= \frac{1}{1 + R\,\underline{Y}_{eq}} \, \underline{e}$$

$$= \frac{1}{1 + R\,\underline{Y}_C + R\,\underline{Y}_L} \, \underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega + \frac{R}{jL\omega}}$$

$$= \frac{\underline{e}}{1 + j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\underline{E}\,e^{j\omega t}$$

$$\underline{U}\,e^{j\omega t} \quad \underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

où $\begin{cases} \dfrac{Q\omega}{\omega_0} = RC\omega \\ \dfrac{Q\omega_0}{\omega} = \dfrac{R}{L\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Q}{\omega_0} = RC & (1) \\ Q\omega_0 = \dfrac{R}{L} & (2) \end{cases}$

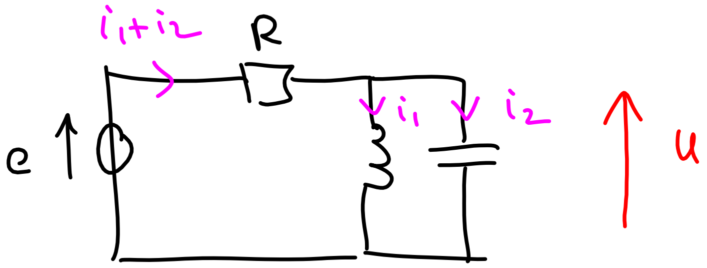
$(1) \times (2) \Rightarrow Q^2 = R^2 \dfrac{C}{L} \Rightarrow \boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

$(2) / (1) \Rightarrow \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

D'où, en simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$\boxed{\underline{U} = \frac{\underline{E}}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}, \quad \text{où} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Rmq : cette forme canonique se justifie à partir de l'éq. diff obtenue avec les lois des mailles et des noeuds :



$$u + R(i_1+i_2) - e = 0$$

$i_2 = C\dot{u}$

$$u + R i_1 + RC\dot{u} = e$$

$$\dot{u} + R\frac{di_1}{dt} + RC\ddot{u} = \dot{e}$$

$u = L\frac{di_1}{dt}$

$\frac{di_1}{dt} = \frac{u}{L}$

$$RC\ddot{u} + \dot{u} + \frac{R}{L}u = \dot{e}$$

$$\ddot{u} + \frac{1}{RC}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = \frac{1}{RC}\dot{e}$$

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{\omega_0}{Q}\dot{e}$$

En RSF et en notation complexe :

$$-\omega^2 \underline{u} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{u} + \omega_0^2 \underline{u} = \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{e}$$

D'où $$\underline{U}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right) = j\frac{\omega\omega_0}{Q}\underline{E}$$

$$\underline{U} = \frac{\dfrac{j\omega\omega_c}{Q} \times \dfrac{Q}{j\omega\omega_0}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{j\omega\omega_c}{Q}\right) \times \dfrac{Q}{j\omega\omega_0}} \underline{E}$$

$$\underline{U} = \frac{\underline{E}}{\dfrac{Q\omega_c}{j\omega} - \dfrac{Q\omega}{j\omega_0} + 1}$$

$\dfrac{1}{j} = -j$

$$\underline{U} = \frac{\underline{E}}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_c}{\omega}\right)} \quad \dots$$

2] (a) On a $U = |\underline{U}|$

$$U = \frac{E}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

L'amplitude $U(x)$ devient maximale lorsque :

$$\boxed{x = x_r = 1} \quad (\text{trivial} \dots) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_r = \omega_0}$$

Ainsi : $U_{max} = U(x=1)$

$$\boxed{U_{max} = E}$$

(b) Résolvons $U(x_c) = \dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad Q\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) = \pm 1$$

Résolution : $\Rightarrow$ voir cours !!

à savoir refaire

On obtiendra : $x_c = \dfrac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$

En ne gardant que les solutions positives et en exprimant :

$$\Delta x = x_{c2} - x_{c1} \quad (\text{où } x_{c2} > x_{c1})$$

on obtient : $\boxed{\Delta x = \dfrac{1}{Q}}$

$\omega_0 \times$ $\qquad$ $\times\, \omega_0$ $\qquad (\omega = x\omega_0)$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

(c) $\quad \varphi_u = \text{Arg}(\underline{U})$

partie réelle > 0

$$= \text{Arg}(\underline{E}) - \text{Arg}\big(\underbrace{1+jQ(x-\tfrac{1}{x})}\big)$$

donc ...

$$= \varphi_e - \text{Arctan}\left[\frac{Q(x-\frac{1}{x})}{1}\right]$$

...

D'où $\Delta\varphi_{u/e} = \varphi_s - \varphi_e$

$$\boxed{\Delta\varphi_{u/e} = \text{Arctan}\left[Q\left(\frac{1}{x} - x\right)\right]}$$

Pour $x = x_r = 1$: $\Delta\varphi_{u/e} = \text{Arctan}(0)$

$$= 0$$

[$u(t)$ et $e(t)$ sont en phase à la résonance.]

PLUS SIMPLE

$$\underline{U}(x=1) = \frac{E}{1+jQ\left(1-\frac{1}{1}\right)}$$

$$= \underline{E}$$

Donc $\text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{E})$

$$\varphi_u = \varphi_e$$

Donc $\Delta\varphi_{u/e} = \varphi_u - \varphi_e$

$$= 0 \quad \ldots$$

3] Etude de cas limites

← aide à faire le tracé

cas $x \ll 1$: $\underline{U} \simeq \dfrac{E}{1 - jQ\frac{1}{x}}$ car $\frac{1}{x} \gg x$

$$\underline{U} \simeq \frac{E}{-jQ/x} = j\frac{E}{Q}x$$

D'où $\boxed{U \simeq \frac{E}{Q}x}$ en prenant le module

De plus : $\varphi_u = \mathrm{Arg}(\underline{U})$

$$= \mathrm{Arg}(\underline{E}) + \mathrm{Arg}\left(\frac{jx}{Q}\right)$$

$$\varphi_u = \varphi_e + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi_{u/e} = \frac{\pi}{2}}$$

Cas $x \gg 1$

$$\underline{U} \simeq \frac{E}{1 + jQx} \quad \text{car } x \gg \frac{1}{x}$$

$$\simeq \frac{E}{jQx}$$

D'où $\boxed{U = \frac{E}{Qx}}$

et $\varphi_u = \mathrm{Arg}(\underline{U}) \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi_{u/e} = -\frac{\pi}{2}}$