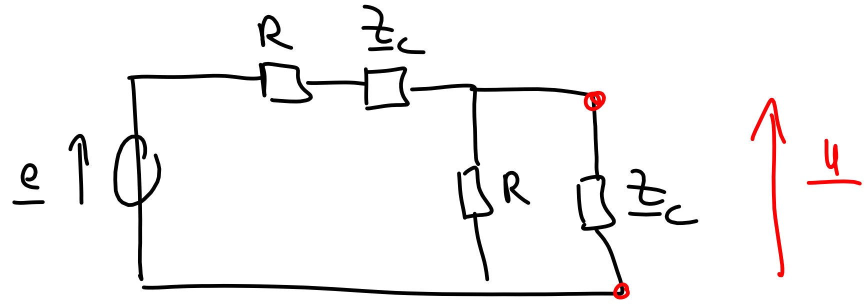
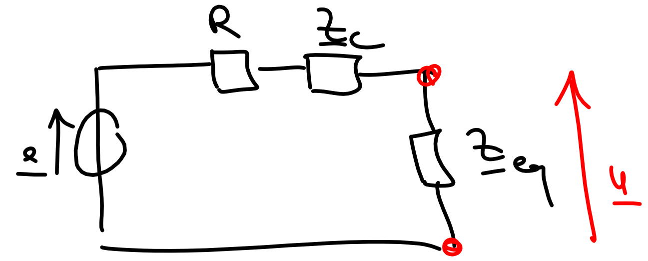
Pont de Wien

1)



$=$



où $\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{R} + \underline{Y}_C$

D'après la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Y}_{eq} \times \underline{Z}_{eq}}{\underline{Y}_{eq} \times \left(\underline{Z}_{eq} + R + \underline{Z}_C\right)} \underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{1 + R\left(\underline{Y}_C + \frac{1}{R}\right) + \underline{Z}_C\left(\underline{Y}_C + \frac{1}{R}\right)} \underline{e}$$

$$= \frac{1}{1 + 1 + 1 + R\underline{Y}_C + \frac{\underline{Z}_C}{R}} \underline{e}$$

$$\boxed{\underline{u} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}} \underline{e}} \quad (*)$$

D'où $\quad 3\underline{u} + jRC\omega\,\underline{u} + \frac{1}{jRC\omega}\underline{u} = \underline{e}$

$\times jRC\omega$ $\quad \times jRC\omega$

$$3RC\,\underbrace{j\omega\,\underline{u}}_{=\,\underline{\dot u}} + R^2C^2\,\underbrace{(j\omega)^2\underline{u}}_{=\,\underline{\ddot u}} + \underline{u} = RC\,\underbrace{j\omega\,\underline{e}}_{=\,\underline{\dot e}}$$

<u>D'où</u> :
$$R^2C^2\,\ddot u + 3RC\,\dot u + u = RC\,\dot e$$

$$\ddot u + \frac{3}{RC}\,\dot u + \frac{1}{R^2C^2}\,u = \frac{\dot e}{RC}$$

$$\boxed{\ddot u + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot u + \omega_0^2\,u = \omega_0\,\dot e \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ Q = \dfrac{1}{3} \end{cases}}$$

<u>2)</u> Revenons à $(*)$:

$$\underline{u} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \dfrac{1}{jRC\omega}}\,\underline{e}$$

$\underline{u} = \underline{U}\,e^{j\omega t}$ $\qquad$ $\underline{e} = \underline{E}\,e^{j\omega t}$

$$\underline{U} = \frac{\underline{E}}{3 + j\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$$

$U = |\underline{U}|$

$$\underline{U} = \frac{\underline{E}/3}{1 + \dfrac{j}{3}\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$\boxed{\underline{U} = \frac{E/3}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \quad , \quad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

<u>D'où</u> : $U = |\underline{U}| \Rightarrow$ $$\boxed{U(x) = \frac{E/3}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

3) $U(x)$ est maximal lorsque $x = 1$ (trivial)

Alors $\boxed{U_{max} = \frac{E}{3}}$

Et la fréquence de résonance est $\boxed{f_r = f_0}$ $(\Leftrightarrow x_r = 1)$

<u>Largeur de la résonance</u>

Résoudre : $U(x_c) = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ ... (<u>voir cours</u>, <u>à savoir faire</u>)

$$\Rightarrow \quad x_c = \frac{\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

D'où $\Delta x = x_{c2} - x_{c1}$

$$= \frac{1}{Q}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta f = \frac{f_0}{Q}} = 3 f_0$$

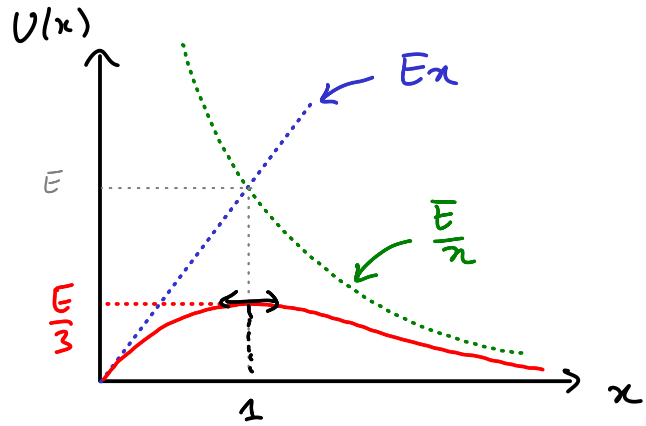
4) Courbe d'amplitude

Pour $x \ll 1$: $U(x) \simeq \dfrac{E/3}{\sqrt{Q^2\left(-\frac{1}{x}\right)^2}}$

$$U(x) \simeq \frac{E/3}{Q}\,x = Ex$$

Pour $x \gg 1$: $U(x) \simeq \dfrac{E/3}{\sqrt{Q^2 x^2}}$

$$U(x) \simeq \frac{E/3}{Qx} = \frac{E}{x}$$



Déphasage

Pour $x \ll 1$: $\underline{U} \simeq \dfrac{\underline{E}/3}{-jQ/x}$

D'où $\mathrm{Arg}(\underline{U}) \simeq \mathrm{Arg}(\underline{E}) - \mathrm{Arg}(-jQ/x) - \mathrm{Arg}(3)$

$$\varphi_u \simeq \varphi_e - \left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0$$

$$\boxed{\Delta\varphi_{u/e} \simeq \frac{\pi}{2}}$$

Pour $x \gg 1$: $\underline{U} \simeq \dfrac{\underline{E}/3}{jQx}$

D'où $\mathrm{Arg}(\underline{U}) \simeq \mathrm{Arg}(\underline{E}) - \mathrm{Arg}(jQx) - \mathrm{Arg}(3)$

$$\varphi_u \simeq \varphi_e - \frac{\pi}{2} - 0$$

$$\boxed{\Delta\varphi_{u/e} \simeq -\frac{\pi}{2}}$$

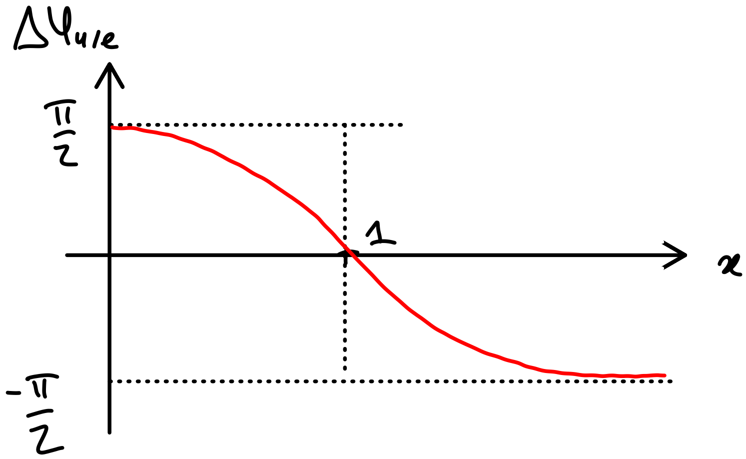
Pour $x = 1$:

$$\underline{U} = \frac{\underline{E}}{3}$$

$$\mathrm{Arg}(\underline{U}) = \mathrm{Arg}(\underline{E}) - \mathrm{Arg}(3)$$

$$\varphi_u = \varphi_e - 0$$

$$\boxed{\Delta\varphi_{u/e} = 0}$$



Rmq : $u(t)$ et $e(t)$ en phase à la résonance (en $x = 1$)