Amortisseur de voiture

1. Une suspension supporte 1/4 de la masse puisqu'il y a 4 roues. Donc $\boxed{m = 5{,}0 \cdot 10^2 \text{ kg}}$

2. On a : $z_c(x) = Z_0 \cos\left(\frac{2\pi}{L}x + \text{constante}\right)$ ← trajectoire du point C

Or $x(t) = v_0 t + \text{constante}$ ← par intégration de $\dot{x}(t) = v_0$

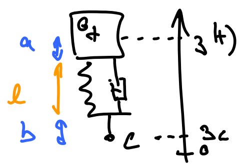
D'où : $z_c(t) = Z_0 \cos\left(\frac{2\pi v_0}{L} t + \text{constante}\right)$

$$\boxed{z_c(t) = Z_0 \cos(\omega t + \underbrace{\varphi_c}_{\text{constante}}) \quad \text{où} \quad \omega = \frac{2\pi v_0}{L}}$$

3. TCDM appliqué au châssis dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\ddot{z}\,\vec{u_z} = -k(\ell-\ell_0)\vec{u_z} - \lambda(\dot{z}-\dot{z}_c)\vec{u_z} - mg\vec{u_z}$$

Or :



$$\ell(t) + \underbrace{a+b}_{\text{constantes}} = z(t) - z_c(t)$$

$\Leftrightarrow \quad \ell(t) = z(t) - z_c(t) - a - b$

D'où :

$$m\ddot{z} = -k(z - z_c - a - b - \ell_0) - \lambda(\dot{z} - \dot{z}_c) - mg \quad (1)$$

À l'équilibre : $0 = -k(z_{eq} - 0 - \ell) - \lambda(0-0) - mg \quad (2)$

En effectuant (1) − (2) et avec $\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dot{z} \\ \ddot{\varepsilon} = \ddot{z} \end{cases}$:

$$m\ddot{\varepsilon} + \lambda\dot{\varepsilon} + k\varepsilon = k z_c + \lambda \dot{z}_c$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = \omega_0^2 z_c + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_c \\ &\text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \Rightarrow Q = \frac{1}{\lambda}\sqrt{km} \end{aligned}}$$

AN : $\boxed{Q = 2{,}1}$

4. On note $\begin{cases} \varepsilon(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \\ z_c(t) = Z_0 \cos(\omega t + \varphi_c) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\varepsilon} = \underline{A}\, e^{j\omega t} \\ \underline{A} = A\, e^{j\varphi} \end{cases}$ et $\begin{cases} \underline{z_c} = \underline{Z_0} e^{j\omega t} \\ \underline{Z_0} = Z_0 e^{j\varphi_c} \end{cases}$

D'où, en remplaçant dans l'ED :

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)\underline{\varepsilon} = \left(\omega_0^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)\underline{z_c}$$

On en déduit :

$$\frac{\underline{A}}{\underline{Z_0}} = \frac{\omega_0^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad \begin{matrix} \times\frac{1}{\omega_0^2} \\ \times\frac{1}{\omega_0^2} \end{matrix}$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{Z_0}} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

En prenant le module :

$$\boxed{G(x) = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}}$$

5. Cas $x \ll 1$:

Or $G(x) = \left[1 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right]^{1/2} \cdot \left[1 + x^2\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) + x^4\right]^{-1/2}$

$G(x) \simeq \left[1 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right]^{1/2} \cdot \left[1 + x^2\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)\right]^{-1/2}$

car $x^4 \ll x^2$

Rappel : $(1+u)^\alpha \simeq 1 + \alpha u$ si $u \ll 1$

D'où : $G(x) \simeq \left[1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{Q^2}\right] \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)\right]$

En développant :

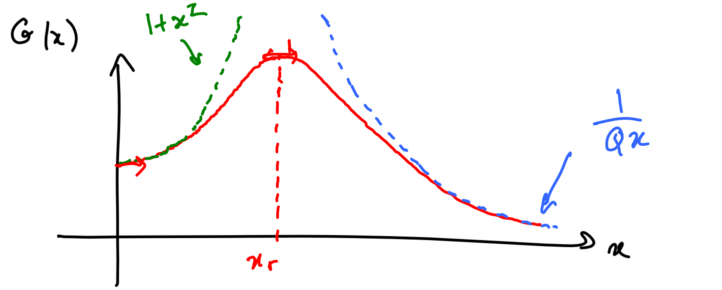
$G(x) \simeq 1 + x^2 + \underbrace{\beta x^4}_{\text{terme en } x^4 \text{ négligeable } (\beta \text{ constant})}$

$\Rightarrow$ $\boxed{G(x) \simeq 1 + x^2 \quad \text{quand } x \ll 1}$

Cas $x \gg 1$:

$G(x) \simeq \sqrt{\frac{(x/Q)^2}{x^4}}$

$$\boxed{G(x) \simeq \frac{1}{Qx}, \text{ si } x \gg 1}$$



Il existe un phénomène de résonance.

6. Pour trouver le maximum de $G(x)$, on peut chercher celui de :

$f(x) = \frac{1 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2} = \frac{h(x)}{g(x)}$

On résoud :

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0$

$\Leftrightarrow \quad h'(x)g(x) - h(x)g'(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ ... ← (allez, courage ! faites-le vous même)

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^5}{Q^2} + 4x^3 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^4}{Q^2} + 2x^2 - 2 = 0$ (on cherche $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \dfrac{X^2}{Q^2} + 2X - 2 = 0$ avec $X = x^2$

D'où, avec $\Delta = 4 + \dfrac{8}{Q^2} = 4\left(1 + \dfrac{2}{Q^2}\right)$

$$X = \frac{-2 + 2\sqrt{1 + \frac{2}{Q^2}}}{2/Q^2} \quad \text{(solution positive)}$$

$$X = Q^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{Q^2}} - 1\right)$$

$\Rightarrow \boxed{x_r = Q\sqrt{\sqrt{1+\frac{2}{Q^2}} - 1}}$

$\Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0 Q\sqrt{\sqrt{1+\frac{2}{Q^2}} - 1}}$

Pour $Q = 2,1$, $\boxed{x_r = 0,95}$

7. Alors, il faut pas rouler à la vitesse produisant la résonance et vérifiant :

$$\omega_r = \frac{2\pi v_0}{L}$$

$\Rightarrow x_r \omega_0 = \dfrac{2\pi v_0}{L}$

$\Rightarrow v_0 = \dfrac{L}{2\pi} x_r \omega_0$

$\Rightarrow \boxed{v_0 = \dfrac{L}{2\pi} x_r \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

AN : $v_0 = 6,3$ km/h