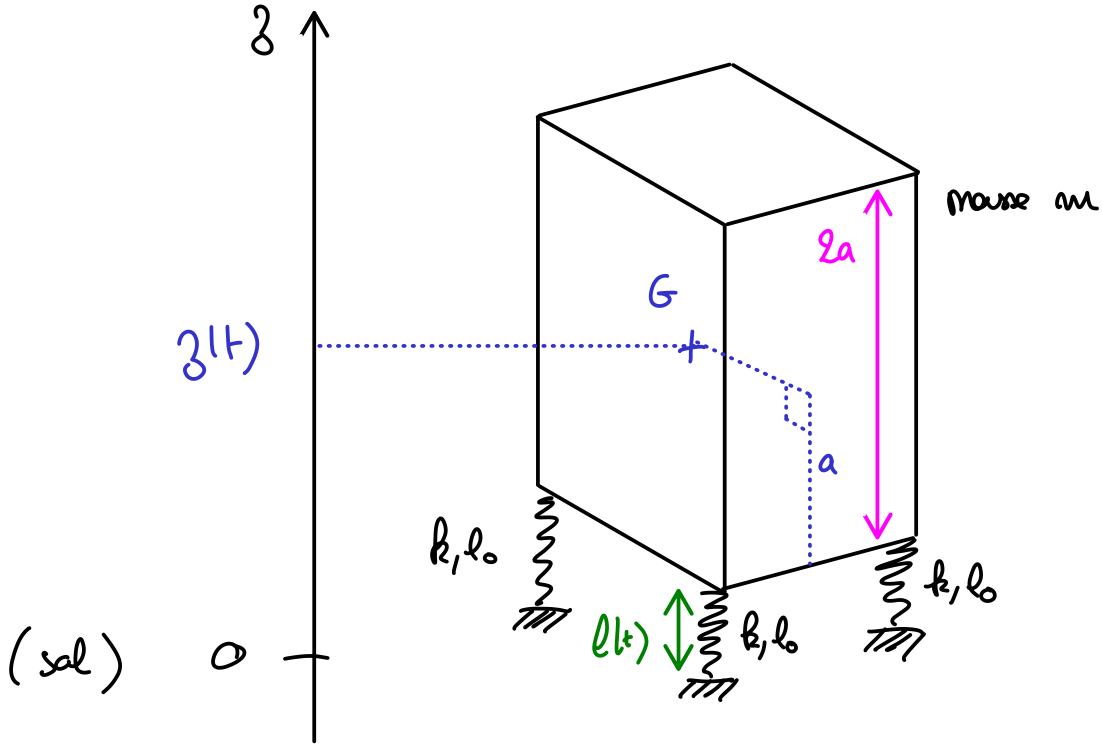
Vibration d'une climatisation



<u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen

<u>Objectif</u>

1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t) = z(t) - z_{eq}$

2) En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{V}$ de la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u_z}$. En déduire l'amplitude V.

3) Déterminer la fréquence de résonance f_r et choisir k tel que $f_{vibration} = f = 100\,Hz$ soit très éloignée de f_r.

On suppose un mouvement purement <u>vertical</u>.

1) D'après la 2ème loi de Newton :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \underbrace{- 4k(l - l_0)\vec{u_z}}_{\substack{\text{les 4 ressorts}\\ \text{se comportent de}\\ \text{manière identique}\\ \text{(même longueur } l(t) \text{ notamment)}}} \underbrace{- \lambda\vec{v}}_{\substack{\text{frottements}\\ \text{fluides}}} + \underbrace{F_0 \cos(\omega t)\vec{u_z}}_{\substack{\text{force due}\\ \text{aux vibrations}}}$$

Par projection suivant $\vec{u_z}$ et avec $\ell = z - a$, ainsi que $v = \dot{z}$:

$$m\ddot{z} = -mg - 4k(z-a-b) - \lambda\dot{z} + F_0\cos(\omega t)$$

$$\boxed{m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + 4kz = 4k(a+b) - mg + F_0\cos(\omega t)} \quad (1)$$

<u>À l'équilibre</u>, $\begin{cases} z(t) = z_{eq} \\ \dot{z}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$ et : $F_0 = 0$ (pas d'excitation)

D'où $\boxed{0 + 0 + 4kz_{eq} = 4k(a+b) - mg + 0} \quad (2)$

Effectuons $(1)-(2)$:

$$m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + 4k(z - z_{eq}) = F_0\cos(\omega t)$$

De plus, notons $\varepsilon(t) = z(t) - z_{eq} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{z} \Rightarrow \ddot{\varepsilon} = \ddot{z}$.

Ainsi :

$$m\ddot{\varepsilon} + \lambda\dot{\varepsilon} + 4k\varepsilon = F_0\cos(\omega t)$$

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)} \quad (3)$$

où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}}$

et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{\lambda}\sqrt{4km}}$

2) En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme : $\varepsilon(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

De même $v(t) = V\cos(\omega t + \varphi_v)$

Introduisons les notations complexes :

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon} = \underline{A}\, e^{j\omega t} \\ \underline{A} = A e^{j\varphi} \end{cases}, \quad \begin{cases} \underline{v} = \underline{V}\, e^{j\omega t} \\ \underline{V} = V e^{j\varphi_v} \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{F} = F_0\, e^{j\omega t}$$

(pas de phase initiale)

Ainsi, d'après (3) :

$$(j\omega)^2 \underline{\varepsilon} + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\underline{\varepsilon} + \omega_0^2\, \underline{\varepsilon} = \frac{\underline{F}}{m}$$

Or $v = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \underline{v} = j\omega\, \underline{\varepsilon}$

D'où

$$j\omega\, \underline{v} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{v} + \omega_0^2 \frac{\underline{v}}{j\omega} = \frac{\underline{F}}{m}$$

$$\underline{v}\left(\frac{\omega_0}{Q} + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)\right) = \frac{\underline{F}}{m}$$

$$\underline{v} = \frac{\frac{Q}{\omega_0} \times 1}{\frac{Q}{\omega_0} \times \left(\frac{\omega_0}{Q} + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)\right)} \cdot \frac{\underline{F}}{m}$$

$$\underline{v} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{Q\underline{F}}{m\omega_0} \quad \text{où} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

En simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$\boxed{\underline{V} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \frac{QF_0}{m\omega_0}}$$

On en déduit V :

$$V = |\underline{V}|$$

$$\boxed{V = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} \frac{QF_0}{m\omega_0}}$$

3) Il y a résonance lorsque V est <u>maximal</u>

$\Leftrightarrow \quad 1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ <u>minimal</u>

$\Leftrightarrow \quad x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \omega = \omega_0$

Ainsi la fréquence de résonance est :

$$f_r = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}$$

$$\boxed{f_r = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\begin{cases} \text{Pour } k = 250\ kN.m^{-1}, & f_r = 50\,Hz \\ \text{Pour } k = 1000\ kN.m^{-1}, & f_r = 100\,Hz \text{ !!} \end{cases}$$

» <u>Pour éviter la résonance, il faut choisir $k = 250\ kN.m^{-1}$</u>