OSCILLATEURS (OSC)

Enseignement de Sciences Physiques / PCSI

Chapitre 2 : Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

Prérequis

- chapitres de **Mécanique**
- chapitres d'**Électrocinétique**
- chapitre **BAO7** - *Système linéaire en régime sinusoïdal forcé*

Mots-clés

résonance, pulsation ou fréquence de résonance, largeur de résonance

Plan du cours

S s f

Les savoirs et les savoir-faire

Capacités exigibles

- Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.
- Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.
- Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

A Réponse en position d'un oscillateur masse-ressort

A.1 Position du problème et mise en équation

1. Soit une masse ponctuelle accrochée à l'extrémité d'un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'altitude de l'autre extrémité est $z_e(t) = Z_e \cos(\omega t + \varphi_e)$. On tient compte d'une force de frottement fluide $-\lambda\vec{v}$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\epsilon(t) = z(t) - z_{eq}$ s'écrit :

$$\ddot{\epsilon} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\epsilon} + \omega_0^2\epsilon = \omega_0^2 z_e(t)$$

Préciser l'expression de ω_0 et Q.

2. Justifier que $\epsilon(t)$ soit de la forme :

$$\epsilon(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

3. **Analogie avec le circuit RLC série.** Soit un circuit RLC série alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice $e(t)$. Montrer que la tension u aux bornes du condensateur et sa charge $q = Cu$ vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 e(t) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 Ce(t)$$

A.2 Amplitude complexe de la position de la masse

4. Introduire les notations complexes.

5. En notant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, montrer que : $\underline{A} = \dfrac{\underline{Z_e}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$.

A.3 Étude de l'amplitude et phénomène de résonance

6. Exprimer l'amplitude $A(x)$ en fonction de x.

7. Par une étude de cas limites, donner l'allure graphique de $A(x)$ en distinguant les deux cas $Q \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

8. Montrer que la pulsation de résonance s'écrit : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$.

9. À quelle condition sur le facteur de qualité la résonance en position peut-elle avoir lieu ?

A.4 Largeur de la résonance

10. Définir les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} et la largeur de la résonance.

11. Dans quel cas la largeur de la résonance (où bande passante) vérifie-t-elle : $\Delta\omega \simeq \dfrac{\omega_0}{Q}$? (*résultat admis*)

Qu'est-ce que cela implique sur l'influence du facteur de qualité sur l'acuité de la résonance ?

A.5 Déphasage

12. Établir l'expression du déphasage $\Delta\varphi_{r/e}$ (réponse $\epsilon(t)$ par rapport à l'excitation $z_e(t)$) en fonction de x en distinguant les cas $x \leqslant 1$ et $x \geqslant 1$.

13. Donner l'allure graphique de $\Delta\varphi_{r/e}$ en fonction de x. Dans quel cas, la réponse du système est-elle en phase avec l'entrée ? et en opposition de phase ? Que dire du cas $x = 1$?

B Réponse en intensité du circuit RLC série

B.1 Amplitude complexe de l'intensité

14. Dans le cas du circuit RLC série d'intensité $i(t)$, montrer que l'amplitude complexe $\underline{I}$ vérifie :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}/R}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

B.2 Étude de l'amplitude et phénomène de résonance

15. Déterminer l'amplitude $I(x)$ en fonction de x.

16. Donner l'allure graphique de $I(x)$ en fonction de x pour différents valeurs du facteur de qualité.

B.3 Caractérisation de la résonance

17. Pour quelle pulsation y a-t-il résonance ? Y a-t-il une condition sur le facteur de qualité Q pour que cette résonance puisse avoir lieu ?

18. Montrer que la largeur de la résonance (ou bande passante) s'écrit rigoureusement $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$. Quelle est alors l'influence de Q sur l'acuité de la résonance ?

B.4 Déphasage

19. Établir l'expression du déphasage $\Delta\varphi_{i/e}$ de l'intensité par rapport à l'excitation.

20. Étudier les cas $x \gg 1$, $x \ll 1$ et $x = 1$.

Act

Activités de cours

1 Analogies RLC série / système masse-ressort : réponse en charge / réponse en position

Les analogies entre ces deux problèmes physiques sont frappantes. Nous cherchons ici à les mettre en évidence.

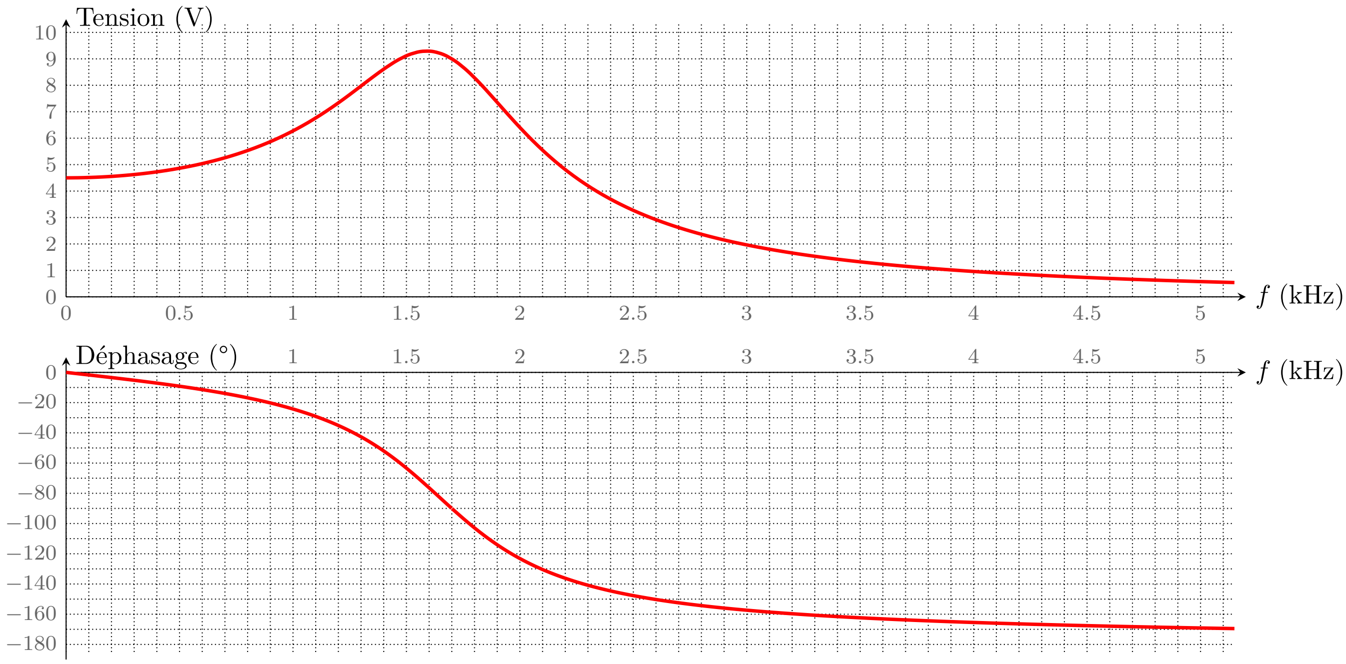
Soit une branche RLC série de résistance R, d'inductance $L = 100$ mH et de capacité $C = 250$ nF alimentée par une source idéale de tension $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e)$. On s'intéresse à la tension $u(t)$ aux bornes du générateur.

1. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$?
2. Établir des analogies avec le système masse-ressort étudié en cours.
3. À quelle condition sur R peut-il y avoir résonance en charge ?
4. Pour $R = 200\ \Omega$, à quelle fréquence de résonance peut-on s'attendre ? Et pour $R = 2,0\ \mathrm{k}\Omega$? Vérification expérimentale avec l'expérience de cours.

2 Etude graphique d'une courbe d'amplitude et déphasage en fonction de la fréquence

Voici une des capacités exigibles de ce chapitre : déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

La tension aux bornes d'un dipôle d'un oscillateur RLC série a été étudiée expérimentalement. Les mesures d'amplitude et de déphasage (par rapport à la tension sinusoïdale appliquée à cette branche RLC) pour différentes fréquence f ont été relevées et sont représentées graphiquement ci-dessous.



1. De quel dipôle s'agit-il ?
2. Quelle est l'amplitude de la tension d'entrée ?
3. Déterminer la fréquence propre f_0 et le facteur de qualité Q de cet oscillateur.
   Est-ce en accord avec la fréquence de résonance que l'on pourrait lire graphiquement ?
4. La résistance totale (tenant compte de la résistance interne de la bobine) a été mesurée à 680 Ω à l'ohmmètre. Déterminer la valeur de C et L.

Doc

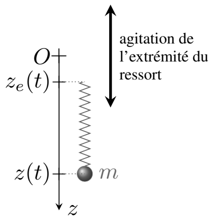
Documents de cours

Document 1 Quelques expériences introductives

Le verre et l'assiette

Marchons en tenant un verre rempli d'eau ou une assiette remplie d'eau, la cadence du pas joue le rôle de fréquence d'excitation. Pour l'assiette, il semble que la cadence du pas en marche normale fait fortement osciller la surface de l'eau, ce qui n'est pas le cas pour le verre d'eau pour lequel il faudrait se mettre à courir afin d'observer le même effet.

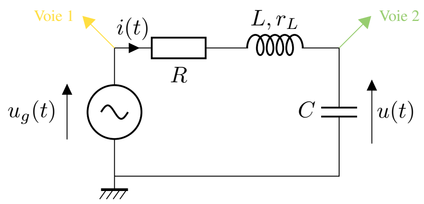
Le système masse-ressort



En faisant varier la fréquence d'agitation du ressort, il apparaît une fréquence particulière pour laquelle l'amplitude de $z(t)$ (amplitude d'oscillation de la masse) devient maximale.

Par ailleurs, on constate que l'amplitude de $z(t)$ est égale à celle de l'agitation à très basse fréquence, et est significativement amoindrie à haute fréquence.

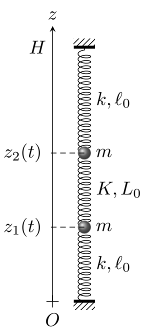
Le circuit RLC série



En faisant varier la fréquence de la tension $u_g(t)$ délivrée par le générateur, il apparaît une fréquence particulière pour laquelle l'amplitude de la tension $u(t)$ du condensateur devient maximale.

Par ailleurs, on constate que l'amplitude de $u(t)$ est égale à celle du générateur à très basse fréquence, et est significativement amoindrie à haute fréquence.

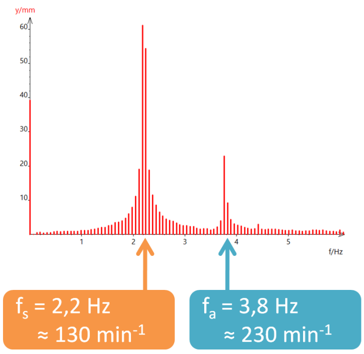
Oscillateurs masse-ressort couplés



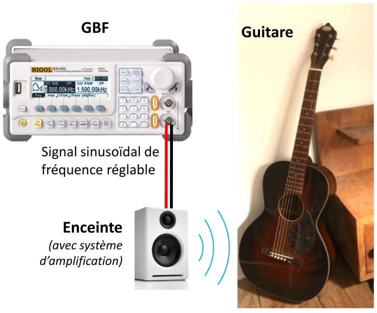
Ce système possède deux fréquences propres dans son spectre (ci-contre) lorsqu'il oscille en régime libre pour un état initial quelconque.

Si on excite le système à la fréquence f_s (respectivement f_a), l'oscillation des masses devient de forte amplitude et le mode d'oscillation observé est le mode symétrique (respectivement antisymétrique).

Par contre, si le système n'est pas excité à une de ces deux fréquences, il ne se met que très peu à osciller.



La guitare et le haut-parleur

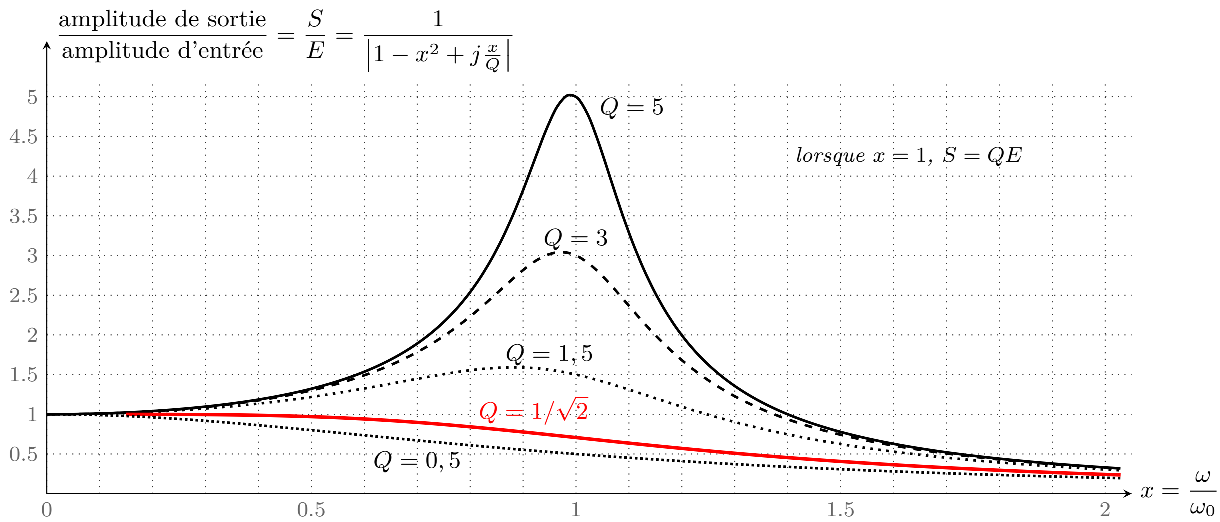


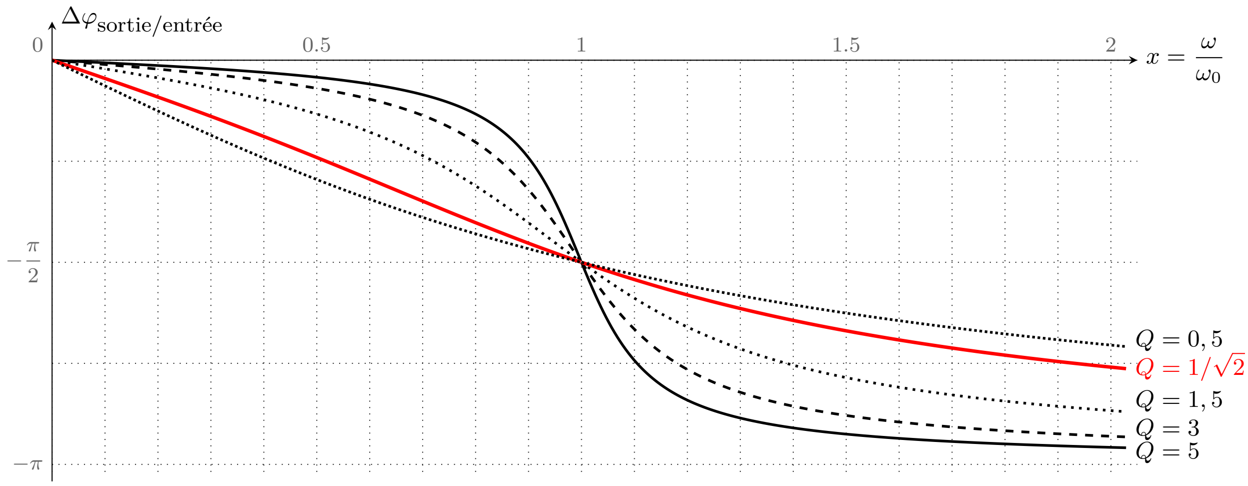
Lorsque la fréquence de l'onde sonore émise par le haut-parleur correspond à une des fréquences propres de la corde de Ré3 de la guitare, qui sont des multiples entiers de $f_1 = 146,8$ Hz, alors la corde de la guitare se met à vibrer de manière significative : lorsqu'on éteint le haut-parleur, on entend distinctement la note produite par cette corde. Si la fréquence de l'onde sonore ne correspond pas une fréquence propre, cet effet n'est plus observé. On peut observer le même phénomène avec n'importe quelle autre corde.

Toutes ces expériences révèlent une propriété commune aux oscillateurs : leur capacité à rentrer en **résonance**. Une résonance a lieu lorsque l'amplitude devient maximale pour une certaine valeur de la fréquence d'excitation. Une fréquence de résonance correspond souvent à une fréquence propre du système, ou tout du moins elle en est souvent très proche.

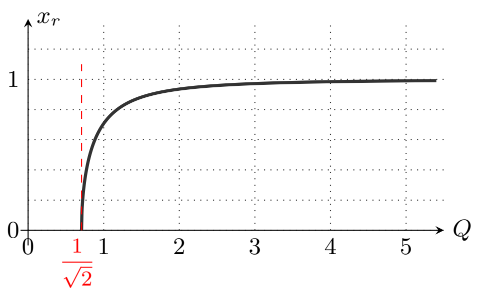
Doc

Document 2 Système masse-ressort, résonance en position - Circuit RLC série, résonance en charge

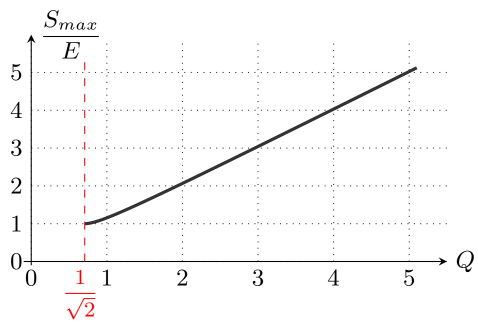




◗ Pulsation de résonance en fonction du facteur de qualité

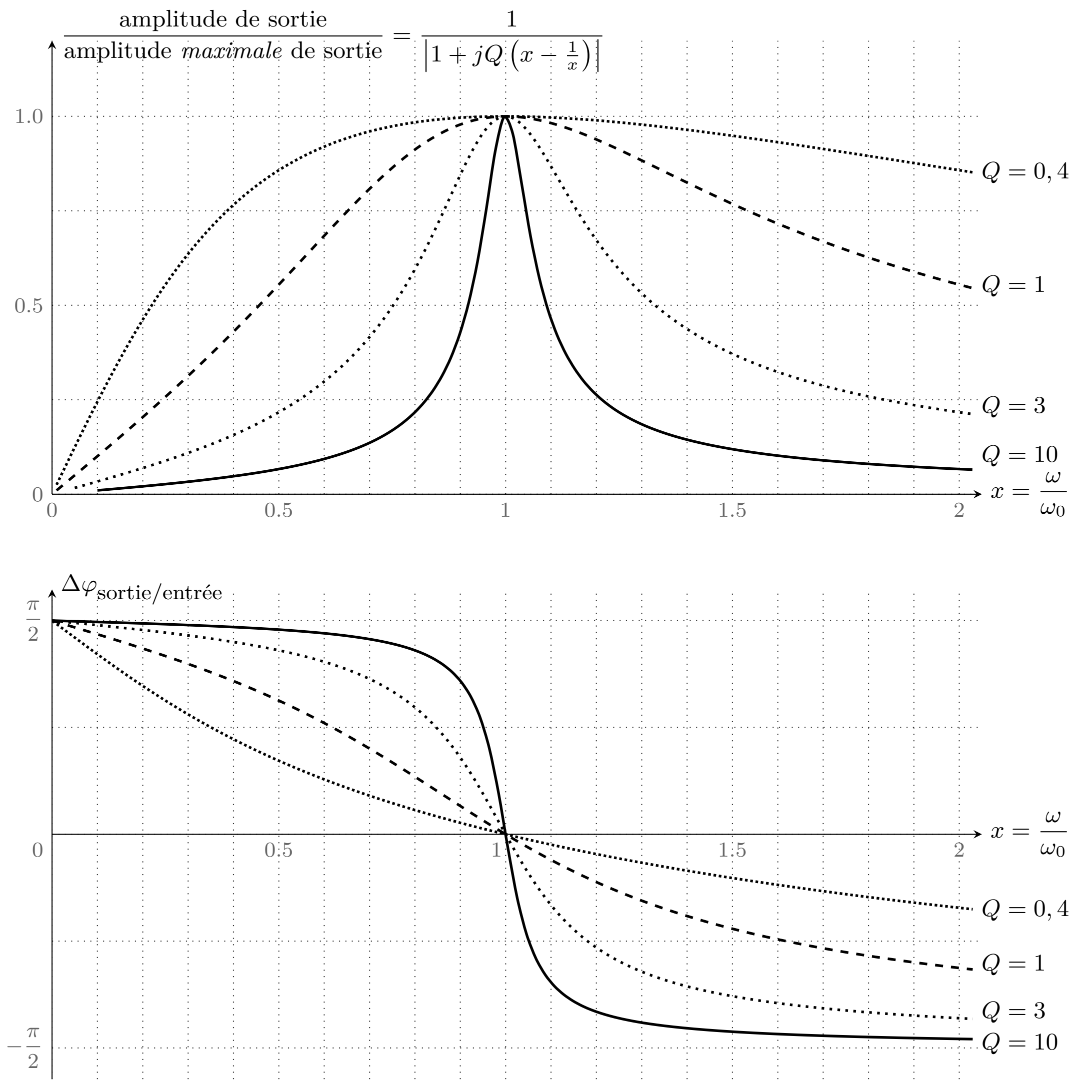


◗ Gain d'amplitude à la résonance en fonction du facteur de qualité



Doc

Document 3 Résonance en intensité pour le circuit RLC série



Exercices

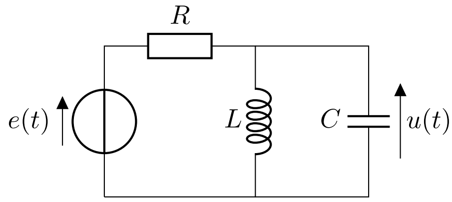
Difficulté de l'exercice (analyse, «technicité», ...) Durée de l'exercice

Compétences travaillées	Exercices			
	1	2	3	4
Établir l'équation différentielle d'un oscillateur électrique	•	•		
Exploiter les impédances complexes	•	•		
Établir l'équation différentielle d'un oscillateur mécanique en RSF			•	•
Déterminer l'amplitude d'un oscillateur en RSF	•	•	•	•
Déterminer le déphasage d'un oscillateur en RSF par rapport à l'excitation	•	•		
Établir l'existence d'une résonance et la caractériser (pulsation, largeur de la résonance)	•	•	•	•
Effectuer des approximations dans les cas hautes et basses fréquences	•	•	•	

Exercice 1 Résonance en tension dans un circuit RLC (non série)

On considère le circuit représenté sur la figure ci-contre où $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e)$.

On ne s'intéresse qu'au régime permanent.

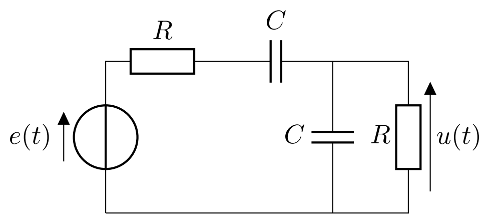


1. Montrer que l'amplitude complexe de u peut s'écrire sous la forme : $\underline{U} = \dfrac{\underline{E}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

   On pourra utiliser deux méthodes : **(a)** l'exploitation des impédances complexes, ou bien **(b)** établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ et passer en notation complexe.
2. (a) Établir qu'il y a un phénomène de résonance de cette tension pour une pulsation à préciser.
   (b) Exprimer la largeur $\Delta\omega$ de la résonance.
   (c) Que peut-on dire du déphasage de u par rapport à e à la résonance ?
3. Représenter graphiquement l'amplitude et la phase initiale de u en fonction de ω.

Exercice 2 Pont de Wien

On considère un pont de Wien alimenté par une tension sinusoïdale $e(t)$.
On s'intéresse au régime permanent.



1. En servant des impédances complexes, établir la relation entre $\underline{u}$ et $\underline{e}$.
   En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. On identifiera le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.
2. Établir l'expression de l'amplitude U de $u(t)$ en fonction de l'amplitude E de $e(t)$. On pourra noter $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.
3. Existe-il une résonance ? Si oui, à quelle fréquence ? Quelle sera la largeur de la résonance ?
4. À l'aide de l'étude de cas limites, représenter graphiquement U en fonction de la fréquence, ainsi que le déphasage par rapport à $e(t)$.

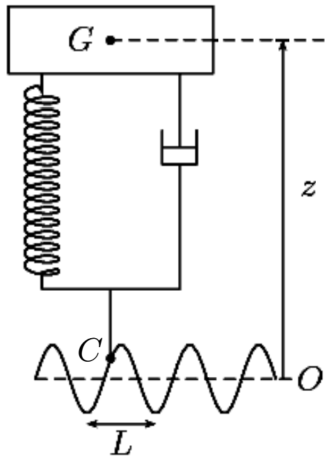
Ex

Exercice 3 Amortisseur de voiture

On étudie le mouvement du châssis d'un véhicule de masse $2,0.10^3$ kg. Chaque suspension est identique et modélisée par un ressort de raideur $k = 2,0.10^4$ N.m^{-1} et de longueur à vide ℓ_0, associé à un amortisseur de constante d'amortissement fluide $\lambda = 1,5.10^3$ uSI.

L'ensemble du véhicule se déplace à vitesse horizontale constante v_0 sur un sol ondulé. L'ondulation du sol est de forme sinusoïdale, de période spatiale $L = 2,0$ m et d'amplitude Z_0, comptée à partir de la ligne moyenne située à altitude nulle.

On note $\vec{v}$ la vitesse du centre de masse du châssis. On note également C le point de contact entre le sol et la roue (non-représentée). C est de vitesse $\overrightarrow{v_C}$ dans le référentiel terrestre. La force exercée par l'amortissement est alors de la forme $\vec{f} = -\lambda(\vec{v} - \overrightarrow{v_C})$ *(et non pas $-\lambda\vec{v}$ car le compartiment enfermant le fluide visqueux permettant l'amortissement suit le même mouvement que la roue, il faut donc évaluer la force de frottement fluide en considérant la vitesse $\vec{v'}$ du châssis dans le référentiel de la roue et vérifiant : $\vec{v'} = \vec{v} - \overrightarrow{v_C}$).*



1. Pour l'étude d'une suspension, quelle masse m supportée par la suspension faut-il prendre en compte ?
2. Quelle est l'expression de $z_C(t)$, altitude du point C ? On précisera l'expression la pulsation ω en fonction de la vitesse v_0 du véhicule et de la période spatiale L.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\epsilon(t) = z(t) - z_{eq}$. La mettre sous forme canonique en identifiant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q. Effectuer l'application numérique pour Q.
4. On note A l'amplitude d'oscillation de ϵ.
   Établir l'expression du rapport $G(x) = \dfrac{A(x)}{Z_0}$ où $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.
5. En étudiant les cas limites $x \ll 1$ et $x \gg 1$, prévoir qualitativement l'allure de la fonction $G(x)$ et en déduire l'existence d'une résonance. On pourra exploiter si besoin le développement limité $(1+u)^\alpha \simeq 1 + \alpha u$ lorsque $|u| \ll 1$.
6. On peut montrer que la pulsation réduite de résonance s'écrit : $x_r = \sqrt{\sqrt{Q^4 + 2Q^2} - Q^2}$.
   Quelle démarche faut-il suivre pour arriver à ce résultat ? (On ne demande pas de la mettre en œuvre).
7. À quelle vitesse v_0 vaut-il mieux ne pas rouler ?

Résolution de problème

Exercice 4 Vibration d'une climatisation

On désire limiter les oscillations en vitesse d'une climatisation de masse 10 kg vibrant à 100 Hz. On utilise pour cela 4 ressorts identiques au niveau des pieds de la climatisation. À cause de vibrations dues à la rotation du moteur du compresseur, on admet que tout se passe comme si la masse était notamment soumise à une force sinusoïdale. On dispose de ressorts de constante de raideur 250 kN.m^{-1} et 1000 kN.m^{-1}. Quelle valeur vaut-il mieux choisir ?