

Chapitre 1 : Description et analyse de signaux

LE COURS

A Caractéristiques générales d'un signal périodique

A.1	Motif, période et fréquence	1
A.2	Définition de la valeur moyenne	2
A.3	Définition de la valeur efficace	2

B Cas du signal sinusoïdal

B.1	Définitions	3
B.2	Valeur moyenne d'un signal sinusoïdal	5
B.3	Valeur efficace d'un signal sinusoïdal	5

C Cas d'un signal périodique quelconque

C.1	Spectre d'un signal périodique	6
C.2	Valeur moyenne d'un signal périodique	8
C.3	Valeur efficace d'un signal périodique	8

D Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

D.1	Définition dans le cas général	9
D.2	Cas particuliers de signaux synchrones	10

A Caractéristiques générales d'un signal périodique

A.1 Motif, période et fréquence

Définitions

Un signal périodique $s(t)$ de **période** T (en s) est une grandeur physique fonction du temps qui se reproduit identique à elle-même au bout d'une durée T :

$$s(t + T) = s(t)$$

Le **motif** est la portion de signal qui se répète indéfiniment, et T correspond donc à la durée du motif.

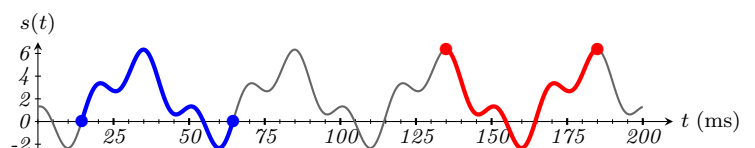
La **fréquence** est l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T}$

Exemple

Dans cet exemple, $s(t) = 2 + 3 \cos(40\pi t + 0,7\pi) + 1,5 \sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ où t est exprimé en secondes.

Voici deux motifs différents (mais on peut en distinguer bien d'autres!).

On lit graphiquement la période : $T = 50$ ms. La fréquence est donc $f = \frac{1}{50 \text{ ms}} = 20$ Hz.



A.2 Définition de la valeur moyenne

Définition

La **valeur moyenne** $\langle s \rangle$ d'un signal $s(t)$ périodique de période T est :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$$

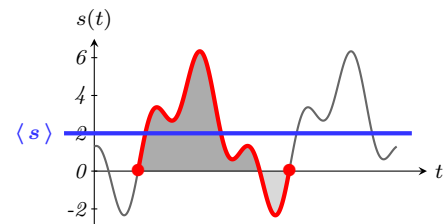
(R) On peut montrer que ce résultat ne dépend pas de l'instant t_0 choisi.

D'après l'interprétation graphique d'une intégrale, $T \cdot \langle s \rangle$ représente donc l'aire sous la courbe du motif.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent. La moyenne $\langle s \rangle$ est positive car l'aire $T \cdot \langle s \rangle$ sous la courbe évaluée sur une période est visiblement positive : en effet, l'aire négative en gris clair est en valeur absolue plus petite que l'aire positive en gris foncé.

En l'occurrence, $\langle s \rangle = 2$ pour cet exemple. Nous verrons plus tard comment obtenir simplement ce résultat ...



A.3 Définition de la valeur efficace

Définition

La **valeur efficace** S_{eff} d'un signal $s(t)$ périodique de période T correspond à la **racine de la moyenne du carré** de $s(t)$:

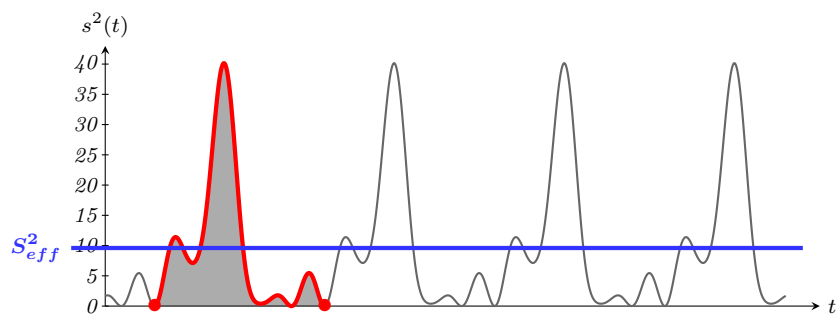
$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt}$$

(R) On peut montrer que ce résultat ne dépend pas de l'instant t_0 choisi.

(R) On parle également de **valeur RMS** («Root Mean Square», c'est-à-dire racine de la moyenne du carré) pour désigner la valeur efficace.

Exemple

Toujours dans l'exemple précédent, voici la représentation de $s^2(t)$ ainsi que la valeur moyenne $\langle s^2 \rangle = S_{eff}^2$ correspondante. La valeur efficace vaut ici $S_{eff} = \sqrt{9,6} = 3,1$ (nous verrons plus tard comment obtenir simplement ce résultat). Pour rappel, la valeur moyenne valait $\langle s \rangle = 2$.



(R) **ATTENTION** : a priori, S_{eff}^2 N'est PAS égal à $\langle s \rangle^2$! Autrement dit : ne pas confondre $\langle s \rangle^2$ et $\langle s^2 \rangle$! On peut le constater aisément à l'aide de l'exemple : $2^2 = 4 \neq 9,6$.

B Cas du signal sinusoïdal

B.1 Définitions

Définition

Un signal sinusoïdal $s(t)$ est un signal **périodique** de la forme :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

où ω est la **pulsation** (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$), A est l'**amplitude**, et φ est la **phase initiale**.

A est positif et a la même dimension que $s(t)$.

► Période, fréquence et pulsation

Comme la fonction \cos est périodique, le signal sinusoïdal est périodique.

Quelle est sa période T ? On sait qu'il s'agit de la plus petite durée au bout de laquelle :

$$\begin{aligned} s(t+T) &= s(t) \\ \Leftrightarrow \cos(\omega t + \omega T + \varphi) &= \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Cela implique : $\omega T = 2n\pi$, où n est nécessairement un entier naturel non nul puisque $\omega > 0$ et $T > 0$. Mais comme on cherche la plus petite valeur de T possible, alors il faut choisir $n = 1$ d'où : $\omega T = 2\pi$.

La période T d'un signal sinusoïdal de pulsation ω vérifie :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Comme la fréquence f est par définition l'inverse de la période, on peut en déduire :

$$\omega = 2\pi f$$

► Phase instantanée et phase initiale

Pour un signal sinusoïdal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, l'angle $(\omega t + \varphi)$ est la **phase instantanée** de $s(t)$.

φ est donc naturellement appelé **phase initiale** puisqu'il s'agit de la valeur de la phase instantanée à $t = 0$.

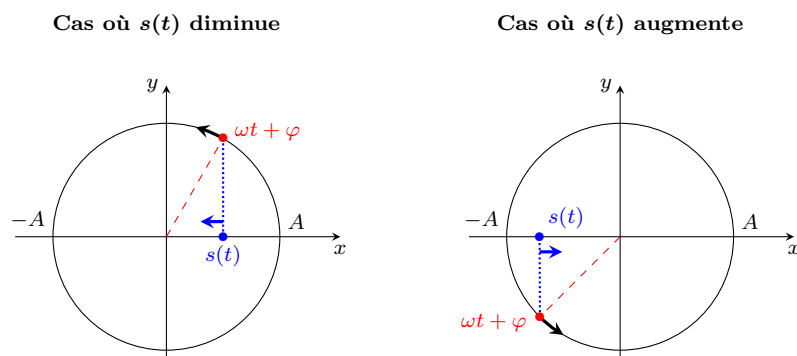
(R) On remarque que $\frac{d(\omega t + \varphi)}{dt} = \omega$. La pulsation représente donc la «vitesse (angulaire)» à laquelle évolue la phase instantanée.

Puisque la fonction cosinus est 2π -périodique, il peut suffire de définir la valeur de φ sur un intervalle de longueur 2π . Et autant utiliser un intervalle centré autour de 0.

Ainsi, on peut se restreindre à définir φ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

► Tracé d'une fonction sinusoïdale

Pour mieux comprendre le lien entre l'évolution de la phase instantanée et l'évolution du signal, **on peut s'aider d'un cercle trigonométrique de rayon A** (plutôt que de rayon 1!) de sorte que, pour un angle $\omega t + \varphi$, par projection sur l'axe des abscisses on puisse lire $A \cos(\omega t + \varphi)$, c'est-à-dire $s(t)$. Ainsi, puisque la phase $\omega t + \varphi$ ne peut qu'augmenter au cours du temps, **on parcourt nécessairement le cercle dans le sens trigonométrique** et la valeur de $s(t)$ oscille donc le long de l'axe Ox entre $-A$ et A en suivant un motif sinusoïdal :

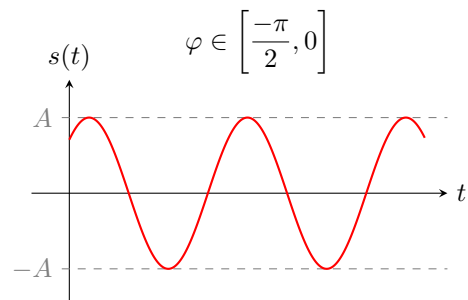
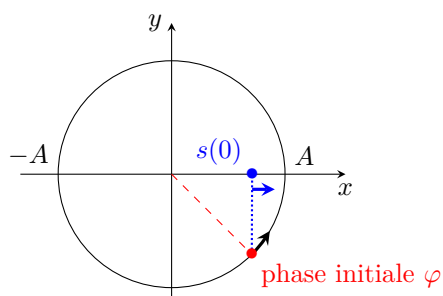
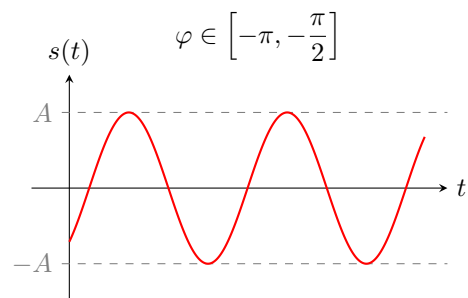
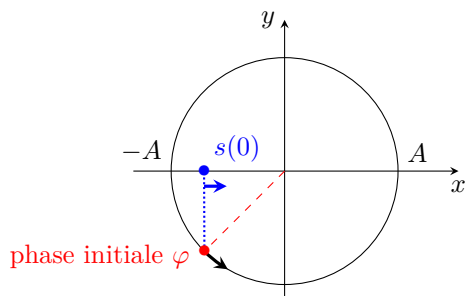
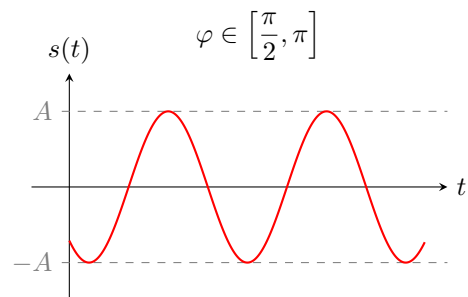
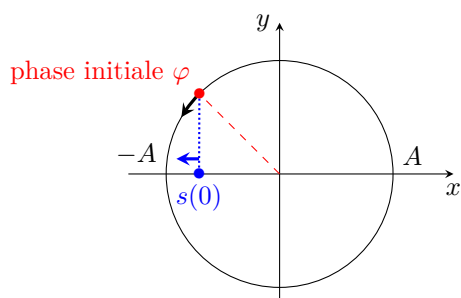
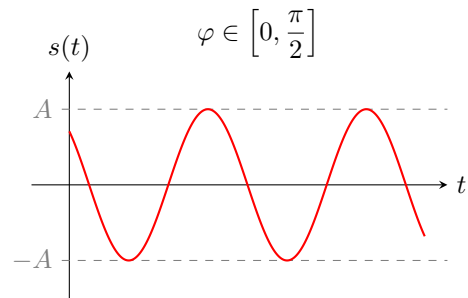
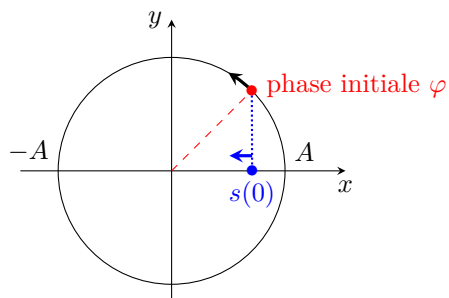


Voici donc différents tracés suivant la valeur de la phase initiale φ .

Dans chaque cas, en regardant uniquement le cercle trigonométrique dans un premier temps, demandez-vous :

- est-ce que la fonction $s(t)$ sera initialement positive ou négative ?
- sera-t-elle initialement croissante ou décroissante ?

Puis, vérifiez que cela est conforme avec le tracé.



On retiendra surtout que modifier la phase initiale φ a pour effet de translater la courbe sinusoïdale vers la gauche ou la droite le long de l'axe des temps.

B.2 Valeur moyenne d'un signal sinusoïdal

$$\begin{aligned}
 \langle s \rangle &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A \cos(\omega t + \varphi) dt \\
 &= \frac{A}{T} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \right]_{t_0}^{t_0+T} \\
 &= \frac{A}{\omega T} [\sin(\omega t_0 + \omega T + \varphi) - \sin(\omega t_0 + \varphi)] \\
 &= \frac{A}{\omega T} [\sin(\omega t_0 + 2\pi + \varphi) - \sin(\omega t_0 + \varphi)] \quad \text{car } \omega T = 2\pi \\
 &= 0 \quad \text{du fait de la } 2\pi\text{-périodicité de la fonction sinus}
 \end{aligned}$$

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est toujours nulle.

R Plutôt que par le calcul, on peut aussi le comprendre de manière graphique : l'aire sous la courbe d'un motif est nulle puisqu'elle se compose d'une aire positive et d'une aire négative toutes deux de même valeur absolue.

B.3 Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

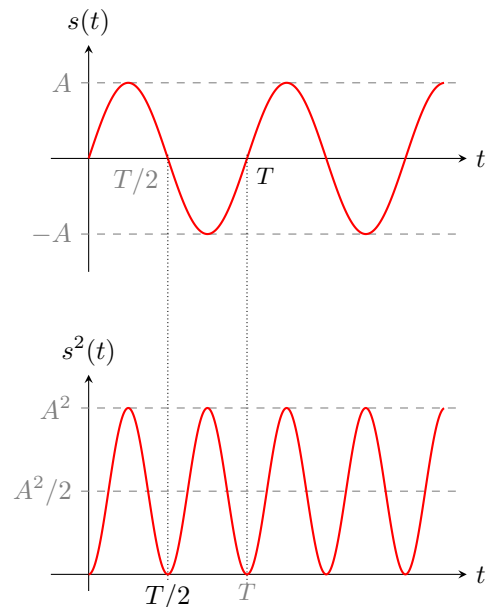
En utilisant la formule de trigonométrie $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$, on obtient :

$$s^2(t) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi)$$

Il s'agit donc de la somme d'un signal constant de valeur $\frac{A^2}{2}$ et d'un signal sinusoïdal d'amplitude $\frac{A^2}{2}$ et de pulsation 2ω , donc de période $\frac{T}{2}$ (comparer ci-contre les tracés de $s(t)$ et $s^2(t)$).

Ainsi, en appliquant la définition de la valeur efficace :

$$\begin{aligned}
 S_{eff}^2 &= \langle s^2 \rangle \\
 &= \left\langle \frac{A^2}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{A^2}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi) \right\rangle \\
 &= \frac{A^2}{2} + 0
 \end{aligned}$$



En effet, nous avons démontré précédemment que la moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle. Et il paraît évident que la moyenne d'une constante est égale à cette constante. (Pour s'en convaincre, appliquer simplement la définition de la moyenne à une constante ...)

Pour un signal sinusoïdal $s(t)$ d'amplitude A , la valeur efficace est $S_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

R Si on souhaite une démonstration plus rigoureuse, la voici :

$$\begin{aligned}
 S_{eff}^2 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{A^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)] dt \\
 &= \frac{A^2}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt + \frac{A^2}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t + 2\varphi) dt \\
 &= \frac{A^2}{2T} [t]_{t_0}^{t_0+T} + \frac{A^2}{2T} \left[\frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\varphi) \right]_{t_0}^{t_0+T} \\
 &= \frac{A^2}{2T} (t_0 + T - t_0) + \frac{A^2}{4\omega T} [\sin(2\omega t_0 + 2\omega T + 2\varphi) - \sin(2\omega t_0 + 2\varphi)] \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4\omega T} [\sin(2\omega t_0 + 4\pi + 2\varphi) - \sin(2\omega t_0 + 2\varphi)] \quad \text{car } \omega T = 2\pi \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4\omega T} [\sin(2\omega t_0 + 2\varphi) - \sin(2\omega t_0 + 2\varphi)] \quad \text{car la fonction sinus est } 2\pi\text{périodique} \\
 &= \frac{A^2}{2}
 \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à passer à la racine carrée ...

C Cas d'un signal périodique quelconque

Pourquoi avons-nous consacré tant d'importance au signal sinusoïdal en lui dédiant une partie spécifique alors qu'a priori, les signaux que l'on sera susceptible de rencontrer ne seront pas nécessairement sinusoïdaux ? Le mathématicien et physicien **Joseph Fourier** démontra au début du XIX^{ème} siècle que :



Tout signal physique peut se décomposer en une superposition signaux sinusoïdaux.

Dans cette partie, nous nous intéresserons en particulier au cas des signaux périodiques et nous verrons que cette superposition permettra de décrire aisément un signal périodique quelconque ainsi que de calculer simplement sa valeur moyenne et sa valeur efficace.

C.1 Spectre d'un signal périodique

Décomposition en série de Fourier

On considère un signal périodique $s(t)$ de motif quelconque, de période T et de fréquence $f = 1/T$.

On admet que le signal $s(t)$ peut alors s'écrire comme une superposition *discrète* de signaux sinusoïdaux de fréquences $f_n = nf$ multiples de f :

$$s(t) = A_0 + \sum_n A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

- A_0 est la **composante continue** du signal.
- $A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)$ est la composante **fondamentale** du signal, d'amplitude A_1 et de phase initiale φ_1 . Sa fréquence $f_1 = f$ est appelée **fréquence fondamentale** et c'est donc elle qui impose la fréquence f et donc la période T du signal.
- La composante $A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$ pour $n \geq 2$ est l'**harmonique de rang n** du signal, d'amplitude A_n et de phase initiale φ_n .

Ⓡ Il est possible de démontrer cette autre forme équivalente : $s(t) = A_0 + \sum_n (\alpha_n \cos(2\pi f_n t) + \beta_n \sin(2\pi f_n t))$ où

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(2\pi f_n t) dt \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(2\pi f_n t) dt \quad (\text{expressions non-exigibles}).$$

L'amplitude au rang $n \geq 1$ vérifie $A_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$.

Cas particulier $n = 0$: $A_0 = \frac{\alpha_0}{2}$

► Analyse spectrale d'un signal périodique

L'analyse spectrale d'un signal consiste à déterminer ses composantes continue et sinusoïdales.

Toute l'information portée par un signal $s(t)$ est donc contenue dans son spectre.

Le spectre d'un signal se compose :

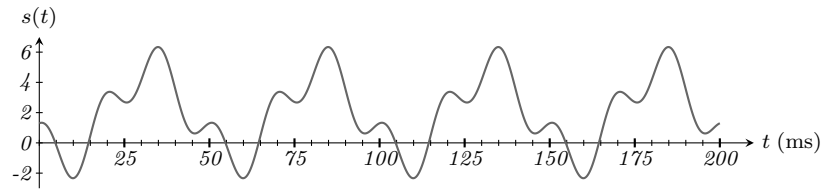
- du **spectre d'amplitude** : représentation de A_n en fonction de f_n
- et du **spectre de phase** : représentation de φ_n en fonction de f_n

Cas de la composante continue : le terme A_0 correspond au terme $A_n \cos(2\pi f_n + \varphi_n)$ dans le cas $n = 0$ en imposant $f_0 = 0$ et $\varphi_0 = 0$.

Exemple

Revenons à l'exemple de la partie **A** :

$$s(t) = 2 + 3 \cos(40\pi t + 0,7\pi) + 1,5 \sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{où } t \text{ est exprimé en secondes}$$

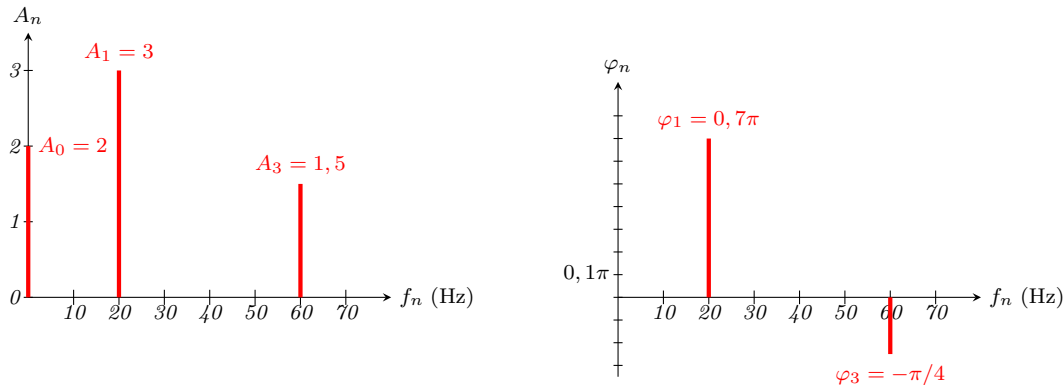


Afin de représenter le spectre de ce signal, il faut d'abord considérer chaque terme de l'addition comme étant de la forme $A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$:

- ❑ **Terme $3 \cos(40\pi t + 0,7\pi)$** Dans ce terme nous pouvons ainsi identifier une fréquence de 20 Hz. L'amplitude correspondante est égale à 3 et la phase initiale est égale à $0,7\pi$.
- ❑ **Terme $1,5 \sin(120\pi t + \frac{\pi}{4})$** À l'aide de la relation de trigonométrie $\sin(a) = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$, on peut écrire ce deuxième terme sous la forme $1,5 \cos\left(120\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$. Cela correspond à une fréquence de 60 Hz, une amplitude égale à 1,5 et une phase initiale égale à $-\frac{\pi}{4}$.
- ❑ **Quelle est la fréquence fondamentale du signal ?** On constate que $60 \text{ Hz} = 3 \times 20 \text{ Hz}$. On peut ainsi raisonnablement dire que le terme de fréquence 20 Hz est la composante fondamentale du signal, alors que le terme de fréquence 60 Hz est l'harmonique de rang 3.
- ❑ Et enfin, la **composante continue** du signal (de fréquence et phase initiale nulle) est bien évidemment $A_0 = 2$.

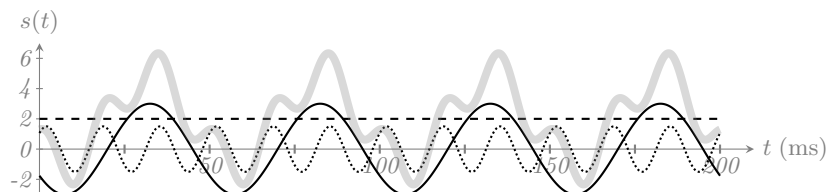
Le signal peut donc effectivement s'écrire sous la forme : $s(t) = A_0 + \sum_n A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$ en ne considérant que les termes de rang 0, 1 et 3.

Voici le tracé du spectre correspondant :



On constate ici l'intérêt du spectre qui est beaucoup plus facile à interpréter que la représentation de $s(t)$ en fonction du temps.

Voici ci-contre le tracé de $s(t)$ en trait épais gris clair, et le tracé des harmoniques en traits fins noirs. On peut ainsi constater graphiquement l'influence de chaque harmonique sur l'allure temporelle du signal $s(t)$.



Bilan

Un signal peut être décrit **entièrement** aussi bien par sa *représentation temporelle* $s(t)$ que par sa *représentation fréquentielle* (son spectre).

En effet, nous avons vu à partir de l'exemple précédent que connaissant l'une des deux représentations, on peut en déduire l'autre. Et inversement.

C.2 Valeur moyenne d'un signal périodique

Soit un signal $s(t) = A_0 + \sum_n s_n(t)$ où $s_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ est l'harmonique de rang $n \geq 1$.

On a :

$$\begin{aligned}\langle s \rangle &= \langle A_0 + \sum_n s_n(t) \rangle \\ &= \langle A_0 \rangle + \sum_n \langle s_n \rangle\end{aligned}$$

Puisque :

- la fondamentale et les harmoniques ont une valeur moyenne nulle (*puisque'il s'agit de composantes sinusoïdales*), c'est-à-dire $\langle s_n \rangle = 0$,
- et la moyenne d'une constante est égale à cette constante, c'est-à-dire $\langle A_0 \rangle = A_0$,

alors : la valeur moyenne du signal $s(t)$ est nécessairement égale à la composante continue : $\langle s \rangle = A_0$

C.3 Valeur efficace d'un signal périodique

Avec les mêmes notations que précédemment : $s^2(t) = A_0^2 + \sum_n s_n^2(t) + A_0 \sum_n s_n(t) + \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} s_i(t) \cdot s_j(t)$

$$\begin{aligned}S_{eff}^2 = \langle s^2 \rangle &= \langle A_0^2 + \sum_n s_n^2(t) + A_0 \sum_n s_n(t) + \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} s_i(t) \cdot s_j(t) \rangle \\ &= \langle A_0^2 \rangle + \sum_n \langle s_n^2 \rangle + A_0 \sum_n \langle s_n \rangle + \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \langle s_i \cdot s_j \rangle\end{aligned}$$

Or : $\langle s_n \rangle = 0$ comme cela a déjà été dit.

De plus, en exploitant $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$:

$$s_i(t) \cdot s_j(t) = \frac{A_i A_j}{2} \{ \cos[(\omega_i + \omega_j)t + (\varphi_i + \varphi_j)] + \cos[(\omega_i - \omega_j)t + (\varphi_i - \varphi_j)] \} = \text{somme de deux sinusoïdes}.$$

Donc $\langle s_i \cdot s_j \rangle = 0$ car la moyenne de la somme est la somme des moyennes et qu'une fonction sinusoïdale est de moyenne nulle.

Il reste donc : $S_{eff}^2 = \langle A_0^2 \rangle + \sum_n \langle s_n^2 \rangle$. On pourra aisément retenir ce résultat ainsi :

carré de la valeur efficace = somme des carrés des valeurs efficaces de chaque harmonique
(y compris celle de rang $n = 0$!)

Avec $\langle A_0^2 \rangle = A_0^2$ et $\langle s_n^2 \rangle = \frac{A_n^2}{2}$ comme cela a déjà été démontré, il reste en passant à la racine carrée :

$$S_{eff} = \sqrt{A_0^2 + \sum_n \frac{A_n^2}{2}} \quad (\text{théorème de Parseval})$$

Exemple

Revenons encore à l'exemple de la partie **A** : $s(t) = 2 + 3 \cos(40\pi t + 0, 7\pi) + 1, 5 \sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

Nous avons déterminé au paragraphe précédent en étudiant le spectre de ce signal que : $A_0 = 2$, $A_1 = 3$ et $A_3 = 1, 5$.

On en déduit $\langle s \rangle = A_0 = 2$.

De plus :

$$\begin{aligned}S_{eff} &= \sqrt{A_0^2 + \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_3^2}{2}} \\ &= \sqrt{2^2 + \frac{3^2}{2} + \frac{1, 5^2}{2}} \\ &= 3, 1\end{aligned}$$

D Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

D.1 Définition dans le cas général

Définition

Soient deux signaux sinusoïdaux $s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

Le **déphasage** $\Delta\varphi_{2/1}$ du signal s_2 par rapport au signal s_1 correspond à la **différence des phases instantanées** :

$$\Delta\varphi_{2/1} = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1)$$

Si $\Delta\varphi_{2/1} > 0$, alors on dira que s_2 est en **avance** de phase par rapport à s_1 .

Si $\Delta\varphi_{2/1} < 0$, alors on dira que s_2 est en **retard** de phase par rapport à s_1 .

En intervertissant les indices 1 et 2, on obtient donc : $\Delta\varphi_{1/2} = (\omega_1 t + \varphi_1) - (\omega_2 t + \varphi_2)$.

On en déduit alors aisément : $\Delta\varphi_{1/2} = -\Delta\varphi_{2/1}$

On en déduit naturellement que :

- si s_2 est en avance de phase par rapport à s_1 , alors s_1 est en retard de phase par rapport à s_2 ;
- et inversement.

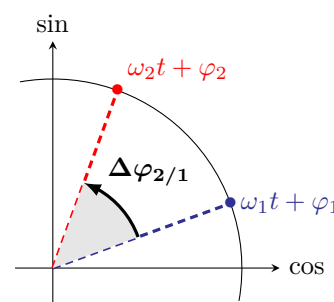
(R) ATTENTION : La notion de déphasage ne s'applique qu'à des **signaux sinusoïdaux** ! Cela n'aurait donc pas de sens de s'intéresser au déphasage d'un signal triangulaire par rapport à un signal rectangulaire par exemple.

► Interprétation avec le cercle trigonométrique

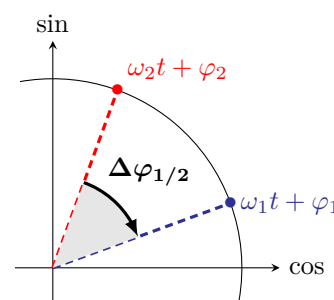
Représentons par exemple le cas où $s_2(t)$ serait en avance de phase par rapport à $s_1(t)$, c'à-d $\Delta\varphi_{2/1} > 0$.

Cela implique donc que : $\omega_2 t + \varphi_2 > \omega_1 t + \varphi_1$.

Voici alors la représentation géométrique de $\Delta\varphi_{2/1}$, différence des angles $\omega_2 t + \varphi_2$ et $\omega_1 t + \varphi_1$, qui est donc bien un angle positif (car orienté dans le sens trigonométrique).



Et ainsi, $\Delta\varphi_{1/2}$ est négatif (angle orienté dans le sens anti-trigonométrique). Cela signifie que $s_1(t)$ est en retard de phase par rapport à $s_2(t)$.



D.2 Cas particuliers de signaux synchrones

Définition

Les signaux s_1 et s_2 sont dits **synchrones** si ils possèdent la même pulsation ω .

Le déphasage devient alors simplement la différence des phases **initiales** :

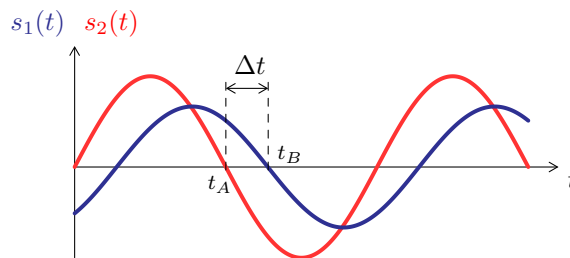
$$\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$$

et est donc **indépendant du temps**.

(R) On pourra bien sûr en déduire aisément : $\Delta\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2$.

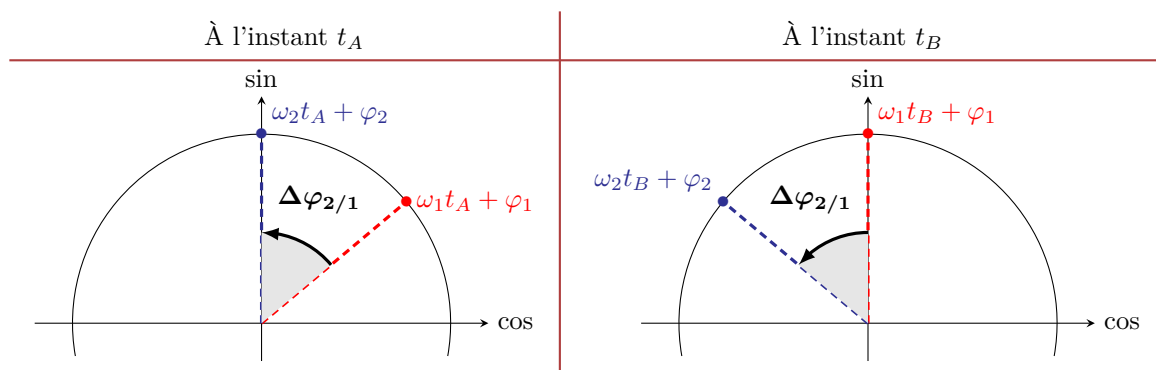
► Lien entre le déphasage et le décalage temporel de deux signaux synchrones

Soient t_B et t_A des **instants consécutifs de passage par zéro** pour les deux signaux synchrones s_1 et s_2 et **pour un même sens de variation** (décroissant dans l'exemple ci-dessous).



Le signal s_2 passe par 0 par valeur décroissante en $t = t_A$, alors que le signal s_1 ne fait de même qu'à l'instant ultérieur $t_B = t_A + \Delta t$.

À l'aide du cercle trigonométrique, cela s'interprète ainsi :



On constate que la phase instantanée de $s_2(t_A)$ est égale à celle de $s_1(t_B)$. D'où :

$$\begin{aligned} \omega_2 t_A + \varphi_2 &= \omega_1 t_B + \varphi_1 &\Rightarrow & \varphi_2 - \varphi_1 = \omega_1 t_B - \omega_2 t_A \\ & &\Rightarrow & \Delta\varphi_{2/1} = \omega_1 t_B - \omega_2 t_A \end{aligned}$$

Or : $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ et : $t_B - t_A = \Delta t$.

Ainsi, lorsque s_2 est en avance de phase par rapport à s_1 et lorsque les deux signaux sont décalés temporellement d'une durée Δt :

$$\Delta\varphi_{2/1} = \omega\Delta t$$

(R) Puisque $\Delta t > 0$, alors $\Delta\varphi_{2/1} > 0$: on retrouve bien le fait que s_2 soit en avance de phase par rapport à s_1 . Et donc $\Delta\varphi_{1/2} = -\omega\Delta t < 0$. s_1 est alors en retard de phase par rapport à s_2 .

Généralisons :

Pour deux signaux sinusoïdaux **synchrones** s_1 et s_2 de pulsation ω et **décalés temporellement d'une durée Δt** , leur déphasage peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta\varphi_{2/1} = \pm\omega\Delta t$$

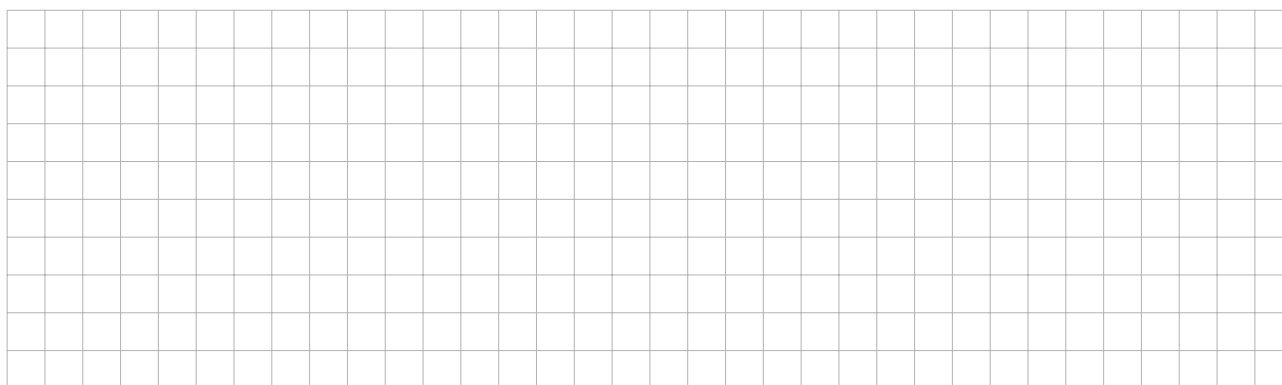
Comment déterminer le signe \pm ? D'après l'exemple traité, pour un sens de variation donné (croissant ou décroissant) :

- si s_2 passe par 0 avant s_1 , alors s_2 est en avance de phase et donc $\Delta\varphi_{2/1} = \omega\Delta t$;
- si s_2 passe par 0 après s_1 , alors s_2 est en retard de phase et donc $\Delta\varphi_{2/1} = -\omega\Delta t$.

Exemple

La figure ci-contre représente un écran d'oscilloscope avec deux signaux sinusoïdaux de même fréquence $s_1(t)$ (en noir) et $s_2(t)$ (en gris, de plus faible amplitude). La ligne horizontale centrale représente le niveau zéro pour les deux signaux. Une division de l'axe des temps correspond à 20 ms.

Calculer le déphasage de s_2 par rapport à s_1 .



► Cas particuliers À CONNAÎTRE :

Dans la 2ème colonne ci-dessous, on exploite le fait que $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On note également $n \in \mathbb{N}$.

Déphasage	Décalage temporel	Allure graphique	Observations
Signaux en phase : $ \Delta\varphi_{2/1} = 2n\pi$	$\omega\Delta t = 2n\pi \Rightarrow \Delta t = nT$ Décalage d'un nombre entier de périodes		Les passages par 0 ont lieu aux mêmes instants et par même sens de variation.
Signaux en opposition de phase : $ \Delta\varphi_{2/1} = \pi + 2n\pi$	$\omega\Delta t = \pi + 2n\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2} + nT$ Décalage d'une demi-période + un nombre entier de périodes		Les passages par 0 ont lieu aux mêmes instants <u>mais</u> par sens de variation opposés.
Signaux en quadrature de phase : $ \Delta\varphi_{2/1} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$	$\omega\Delta t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4} + nT$ Décalage d'un quart de période + un nombre entier de périodes		Lorsqu'un signal passe par 0, l'autre signal atteint un extremum.

(R) Dans l'exemple de la dernière ligne de ce tableau, pour un même sens de variation (sens décroissant par exemple), s_1 passe par 0 avant s_2 . Donc $\Delta\varphi_{1/2} > 0$ (s_1 est en avance de phase par rapport à s_2).