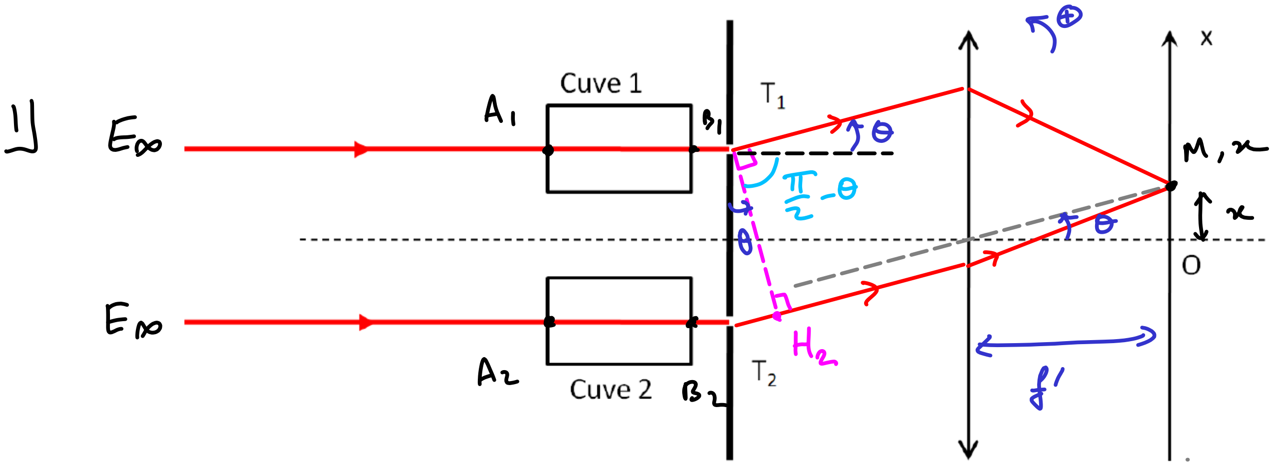
Détecteur interférométrique de concentration

1)



2)

On a $\delta = (E_\infty A_2 B_2 T_2 H_2 M) - (E_\infty A_1 B_1 T_1 M)$

$$\delta = \cancel{(E_\infty A_2)} + (A_2B_2) + (T_2H_2) + \cancel{(H_2M)}$$

$$- \left[\cancel{(E_\infty A_1)} + (A_1B_1) + \cancel{(T_1M)} \right]$$

car même durée de propagation

pourquoi ??

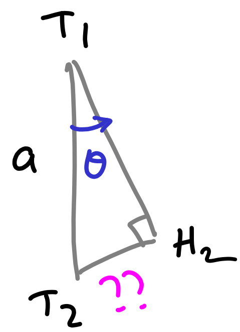
Signaux en phase en H_2 et T_1 car situés sur le même plan équiphase. Donc même durée de propagation entre M et T_1 et entre M et H_2. D'où $(H_2M) = (T_1M)$

$$= (A_2B_2) - (A_1B_1) + (T_2H_2)$$

$$= n_2 \underbrace{A_2B_2}_{=\ell} - n_1 \underbrace{A_1B_1}_{=\ell} + \underbrace{n_{air}}_{=1} T_2H_2$$

$$\boxed{\delta = (n_2 - n_1)\,\ell + T_2H_2}$$

Or :



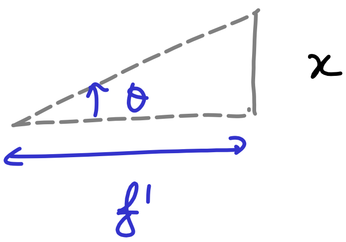
D'où : $T_2H_2 = a \sin\theta$

$$\boxed{T_2H_2 \simeq a\,\theta}$$

si $|\theta| \ll 1$

(vérifié dans les conditions de Gauss)

Par ailleurs :



D'où $\tan\theta = \dfrac{x}{f'}$

Or $\tan\theta \simeq \theta$ si $|\theta| \ll 1$

Donc $\boxed{\theta \simeq \dfrac{x}{f'}}$

Ainsi : $\boxed{T_2H_2 \simeq \dfrac{ax}{f'}}$

Finalement :

$$\boxed{\delta \simeq (n_2 - n_1)\,\ell + \frac{ax}{f'}}$$

3) Cherchons les valeurs de x où une interférence constructive est observée et vérifiant donc :

longueur d'onde dans le vide

$$\delta(x) = p\lambda \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Notons x_p la solution correspondante à une valeur de p donnée. Alors :

$$(n_2 - n_1)\,\ell + \frac{a x_p}{f'} = p\lambda \qquad (1)$$

Au rang $p+1$:

$$(n_2 - n_1)\,\ell + \frac{a x_{p+1}}{\lambda} = (p+1)\lambda \qquad (2)$$

<u>Effectuons</u> (2) − (1) <u>car</u> $\boxed{i = |x_{p+1} - x_p|}$:

$$\frac{a}{f'}(x_{p+1} - x_p) = \lambda$$

$$x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda f'}{a} > 0$$

D'où $$\boxed{i = \frac{\lambda f'}{a}}$$

<u>AN</u> : $i = 3,19 \cdot 10^{-5}\ m$

$= 31,9\ \mu m$

4] • On sait que :

$$A^2(x) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\Delta\varphi_{1/2}(x)\right)$$

• D'après l'énoncé, $\exists\ K$ (constante) tq

$$I(x) = K A^2(x)$$

• Supposons $A_1 = A_2 = A_0$, alors :

$$I(x) = 2KA_0^2 \underbrace{\left[1 + \cos\left(\Delta\varphi_{1/2}(x)\right)\right]}_{\text{Varie entre } 0 \text{ et } 2}$$

donc cohérent avec le tracé !

<u>Donc</u> $I_{max} = 4KA_0^2$

- Par ailleurs :

$$\Delta\varphi_{1/2} = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \qquad \text{(voir cours)}$$

<u>D'où</u> $I(x) = \dfrac{I_{max}}{2}\left[1 + \cos\left(2\pi \underbrace{\dfrac{a}{\lambda f'}}_{\text{analogue à une fréquence}} x + \underbrace{cste}_{= \frac{2\pi}{\lambda}(n_2-n_1)\ell}\right)\right]$

↳ Expression du type :

$I(x)$ = constante + fonction sinusoïdale de « fréquence » $\dfrac{a}{\lambda f'}$

Donc $I(x)$ est périodique, de période $\dfrac{\lambda f'}{a}$.

On reconnaît i, ce qui est cohérent car l'intensité sur le capteur redevient maximale à chaque fois qu'on s'est déplacé d'une interfrange, par définition.

5) (a) On a établi $i = \dfrac{\lambda f'}{a}$

⟹ résultat indépendant de n_1 et n_2.

Donc <u>l'interfrange est inchangée.</u>

(b) Pour une même différence de marche $\delta = p\lambda$ (donc pour un entier p fixé) quelle est la position x_p de la frange brillante ?

Rappel : $$\delta = \frac{ax}{f'} + (n_2 - n_1)\ell$$

Dans le cas $n_1 = n_2$ (début de l'expérience)

$$p\lambda = \frac{a x_p}{f'} \quad (3)$$

Dans le cas $n_1 \neq n_2$

$$p\lambda = \frac{a x_p'}{f'} + (n_2 - n_1)\ell \quad (4)$$

On cherche à évaluer le déplacement $x_p' - x_p$ de cette frange brillante de rang p.

Effectuons alors (4) - (3) :

$$0 = \frac{a}{f'}(x_p' - x_p) + (n_2 - n_1)\ell$$

D'où $$\underbrace{x_p' - x_p}_{>0} = (n_1 - n_2)\frac{\ell f'}{a}$$

car $x_p' > x_p$ d'après l'énoncé

Donc $d = x_p' - x_p \Rightarrow$ $$\boxed{d = (n_1 - n_2)\frac{\ell f'}{a}}$$

(c) À la fin de l'expérience : $\begin{cases} n_1 = n_a \\ n_2 = n_{co} \end{cases}$

De plus, $d = N i$ où $\begin{cases} N = 113 \\ i = \dfrac{\lambda f'}{a} \end{cases}$

D'où : $N \dfrac{\lambda f'}{a} = (n_a - n_{co}) \dfrac{\ell f'}{a}$

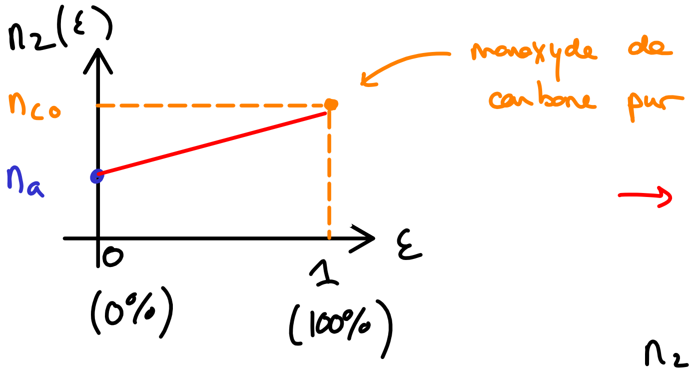
$$N \lambda = (n_a - n_{co}) \ell$$

$$\boxed{n_{co} = n_a - N \frac{\lambda}{\ell}}$$

AN : $n_{co} = 1,\underbrace{00029}_{\text{5 chiffres après la virgule}} - \underbrace{113 \times \dfrac{532 \cdot 10^{-9}}{1,00}}_{0,\underbrace{0000601}_{\text{7 chiffres}}}$

$$n_{co} = 1,00023$$ (arrondi à 5 chiffres après la virgule)

b) (a) D'après l'énoncé :



→ fonction affine de la forme :

$$n_2(\varepsilon) = \alpha \varepsilon + \beta$$

or $\begin{cases} n_2(\varepsilon=0) = n_a \\ n_2(\varepsilon=1) = n_{co} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + \beta = n_a \\ \alpha + \beta = n_{co} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = n_a \\ \alpha = n_{co} - n_a \end{cases}$

D'où $\boxed{n_2(\varepsilon) = (n_{co} - n_a)\,\varepsilon + n_a}$

(b) En mesurant le déplacement d de la figure d'interférence sur le capteur CCD, on en déduit n_2 et donc ε grâce à la relation précédente.

⟹ Quelle est la plus petite mesure de d réalisable ?

taille d'un pixel sur le capteur CCD

__Nécessairement__ : $d \geqslant d_{px}$

D'où $(n_1 - n_2)\dfrac{\ell f'}{a} \geqslant d_{px}$

$n_1 = n_a$

$n_2 = (n_{co} - n_a)\varepsilon + n_a$

$(n_a - n_{co})\,\varepsilon \cdot \dfrac{\ell f'}{a} \geqslant d_{px}$

division membre à membre par $n_a - n_{co} > 0$

$$\boxed{\varepsilon \geqslant \underbrace{\frac{a\, d_{px}}{\ell f'(n_a - n_{co})}}_{= \varepsilon_{min}}}$$

__AN__ : $\varepsilon_{min} = \dfrac{100.10^{-6} \times 5{,}6.10^{-6}}{1{,}00 \times 6{,}00.10^{-3} \times (1{,}00029 - 1{,}00023)}$

$= 1{,}6 . 10^{-3}$

$\varepsilon_{min} = 0{,}16\ \%$

__Rmq__ : Si on veut diminuer ε_{min} ⟹ $\begin{cases} \text{diminuer } a \text{ et/ou } d_{px} \\ \text{augmenter } \ell \text{ et/ou } f' \end{cases}$