Anharmonicité d'une corde de piano

1) On a : $\omega = v k \sqrt{1+\alpha k^2}$

or $[\omega] = T^{-1}$ et $[k] = L^{-1}$ $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$

et $\left[\sqrt{1+\alpha k^2}\right] = 1$

Donc $[\omega] = [v k] = [v][k]$

D'où $\boxed{[v] = L.T^{-1}}$ homogène à une vitesse

De plus, $[\alpha k^2] = 1$ (terme adimensionné sous la racine)

Donc $\boxed{[\alpha] = L^2}$

2) La corde étant fixe en ses deux extrémités :

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad , \quad \text{or} \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

d'où : $$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

D'où $$\omega_n = v k_n \sqrt{1 + \alpha k_n^2}$$

$$\boxed{f_n = \frac{nv}{2L} \sqrt{1 + \frac{n^2 \alpha \pi^2}{L^2}}}$$

3) Pour un instrument de musique, on souhaite que les harmoniques soient des multiples entiers d'une fréquence fondamentale F :

$$f_n = n F$$

Or, l'expression précédente n'est pas compatible avec cette condition sauf si

$$\frac{n^2 \alpha \pi^2}{L^2} \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L \gg n\pi\sqrt{\alpha}}$$

Dans le cas : $f_n \simeq nF$

où $F = \dfrac{c}{2L}$

Il vaut mieux privilégier des cordes longues.