Résonances de la corde de Melde

1) On sait que $z(x,t)$ est de la forme :

$$z(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)$$

» Que valent A, ψ et φ ?

Pour cela, on exploite les conditions aux limites.

En $x=0$: $\quad z(0,t) = A_v \cos(\omega t)$

$$\Leftrightarrow A\cos\psi \cos(\omega t+\varphi) = A_v \cos(\omega t)$$

Par identification : $\begin{cases} A\cos\psi = A_v \\ \boxed{\varphi = 0} \end{cases} \Rightarrow A = \dfrac{A_v}{\cos\psi} \quad (*)$

En $x = L$: $\quad \forall t,\quad z(L,t) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall t,\quad A\cos(kL+\psi)\cos(\omega t) = 0$$

Donc nécessairement : $\quad \cos(kL+\psi) = 0$

D'où $\quad kL+\psi = \dfrac{\pi}{2} + p\pi \quad$ où $p \in \mathbb{Z}$

$$\psi = -kL + \frac{\pi}{2} + p\pi$$

Ainsi $\quad \cos(kx+\psi) = \cos\left[\dfrac{\pi}{2} - k(L-x) + p\pi\right]$

$$= (-1)^p \cos\left[\frac{\pi}{2} - k(L-x)\right]$$

$$\cos(kx+\psi) = (-1)^p \sin\left[k(L-x)\right]$$

Donc pour $x=0$, $\quad \cos\psi = (-1)^p \sin(kL)$, d'où $\boxed{A = \dfrac{A_v}{(-1)^p \sin(kL)}}$

Finalement : $\quad z(x,t) = \dfrac{A_v}{(-1)^p \sin(kL)} (-1)^p \sin\left[k(L-x)\right]\cos(\omega t)$

$$\boxed{z(x,t) = \frac{A_v}{\sin(kL)} \sin\left[k(L-x)\right]\cos(\omega t)}$$

2) Il y a résonance lorsque, pour n'importe quelle absisse x, l'amplitude de vibration :

$$\left| \frac{A v}{\sin(kL)} \sin[k(L-x)] \right|$$

prend une valeur maximale.

C'est le cas lorsque :

$$\sin(kL) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad kL = n\pi \qquad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

(car $\begin{cases} k > 0 \\ L > 0 \end{cases}$)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\pi f}{c} L = n\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f = \frac{nc}{2L}}$$

Rmq 1

Il s'agit également des fréquences propres de la corde lorsqu'elle est fixe en ses deux extrémités.

Rmq 2

Il peut paraître étrange d'affirmer $\sin(kL) = 0$ car alors l'amplitude de vibration en chaque point tend vers l'infini ! La corde serait donc infiniment longue pour cela.

Bien entendu, c'est impossible. Cela est dû à la non prise en compte de la raideur de la corde notamment, ainsi que des frottements. Il est alors possible de montrer (en 2ème année) que la relation $k = \frac{\omega}{c}$ n'est plus valable.

Néanmoins, il sera vu en TP que les fréquences de résonances semblent bien de la forme $f_n = \frac{nc}{2L}$, ce qui confère une certaine légitimité au modèle simpliste envisagé.