

Chapitre 4 : Ondes stationnaires

LE COURS

A Ondes stationnaires sinusoïdales

A.1	Contexte et approche expérimentale	1
A.2	Nœuds et ventres de vibration	3
A.3	Forme mathématique d'une onde stationnaire	4

B Modes propres d'une corde fixe en ses extrémités

B.1	Qu'est-ce qu'un mode propre?	5
B.2	Fréquence des modes propres d'une corde	6
B.3	Expression mathématique d'un mode propre	7
B.4	Vibration quelconque d'une corde	8

A Ondes stationnaires sinusoïdales

A.1 Contexte et approche expérimentale

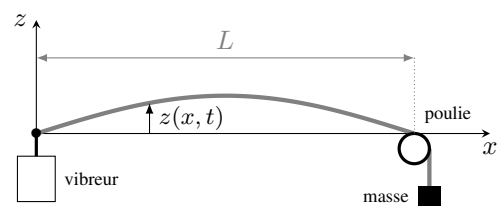
a. Observation d'une onde stationnaire à l'aide du dispositif de la corde de Melde

Expérience

► Dispositif expérimental

L'expérience consiste à tendre une corde à l'aide d'une masse accrochée à une de ses extrémité, une poulie permettant, en la positionnant, de régler la longueur utile L de corde.

L'autre extrémité de la corde est accrochée à un vibreur contrôlé par un générateur de signaux. On peut ainsi choisir la fréquence et l'amplitude de l'excitation sinusoïdale que l'on souhaite transmettre à la corde.



$z(x, t)$ est le déplacement transversal du point de la corde d'abscisse x .

► Observations

La corde peut être le siège d'**ondes stationnaires**, d'autant plus aisément observables pour certaines fréquences imposées par le vibreur (*dues à des phénomènes de résonance qui pourront être étudiés et expliqués en exercice ...*).

Pour une certaine fréquence f_1 de résonance, on observe un seul fuseau :



Puis, en augmentant la fréquence progressivement, il apparaît deux fuseaux avec des amplitudes de vibration en chaque point de la corde maximale pour une fréquence $f_2 = 2f_1$.

A.2 Nœuds et ventres de vibration

Définitions

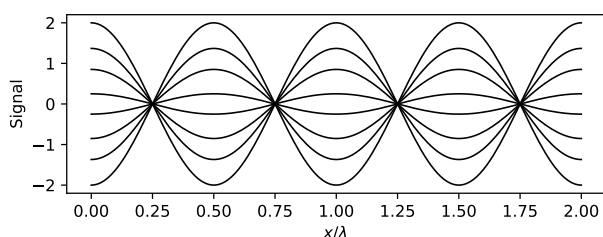
Un **ventre** correspond à une position de l'axe Ox où il existe une **interférence constructive**.

Un **nœud** correspond à une position de l'axe Ox où il existe une **interférence destructive**.

Un **fuseau** représente l'ensemble des points situés entre deux nœuds consécutifs

Effectuons ci-contre une simulation de la superposition de $s_1(x, t)$ et $s_2(x, t)$ en différents instants (onde s_1 en tiret, onde s_2 en pointillé, onde résultante $s = s_1 + s_2$ en trait plein et gras).

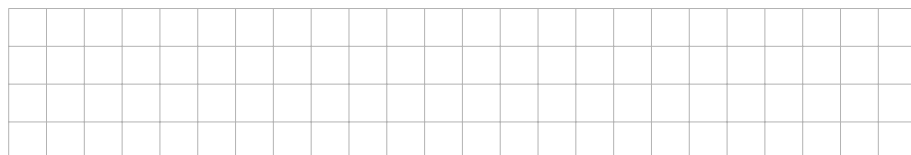
Compilons ces tracés de l'onde résultante $s(x, t)$ obtenus en différents instants dans le graphique ci-dessous :



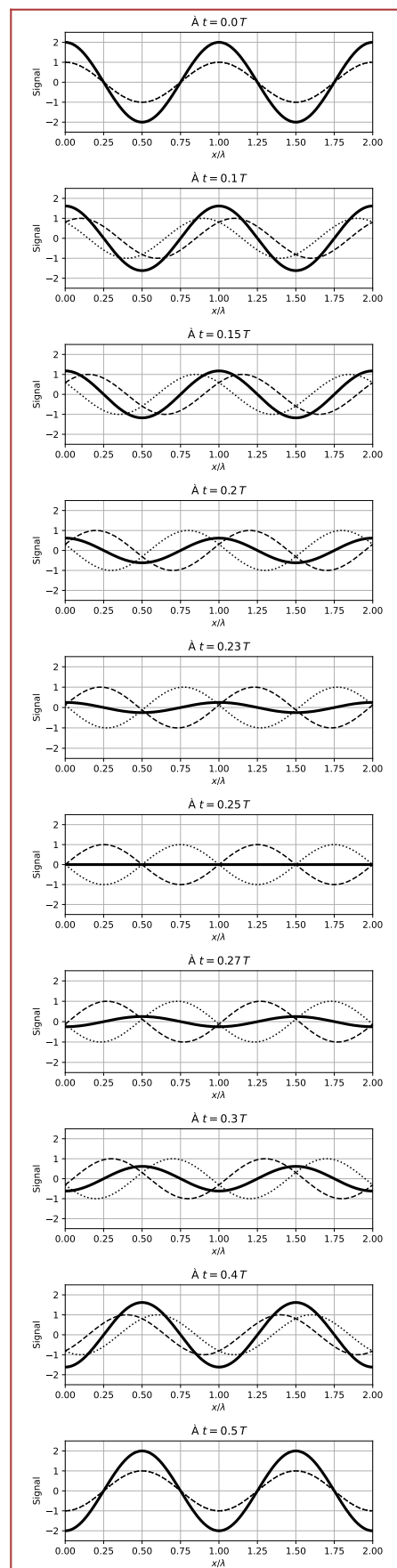
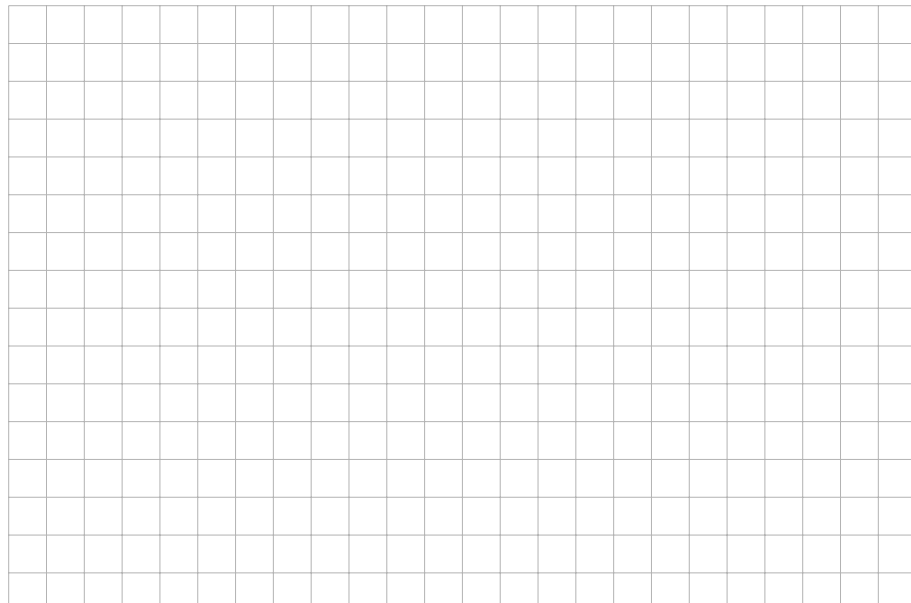
On voit bien apparaître des **nœuds** et des **ventres** de vibrations.

La longueur d'un fuseau correspondant à la distance entre deux nœuds consécutifs, vaut $\frac{\lambda}{2}$, où λ est la longueur d'onde commune des deux ondes progressives $s_1(x, t)$ et $s_2(x, t)$.

Démontrons cela. Pour cela, intéressons-nous au déphasage $\Delta\varphi_{2/1}(x)$:

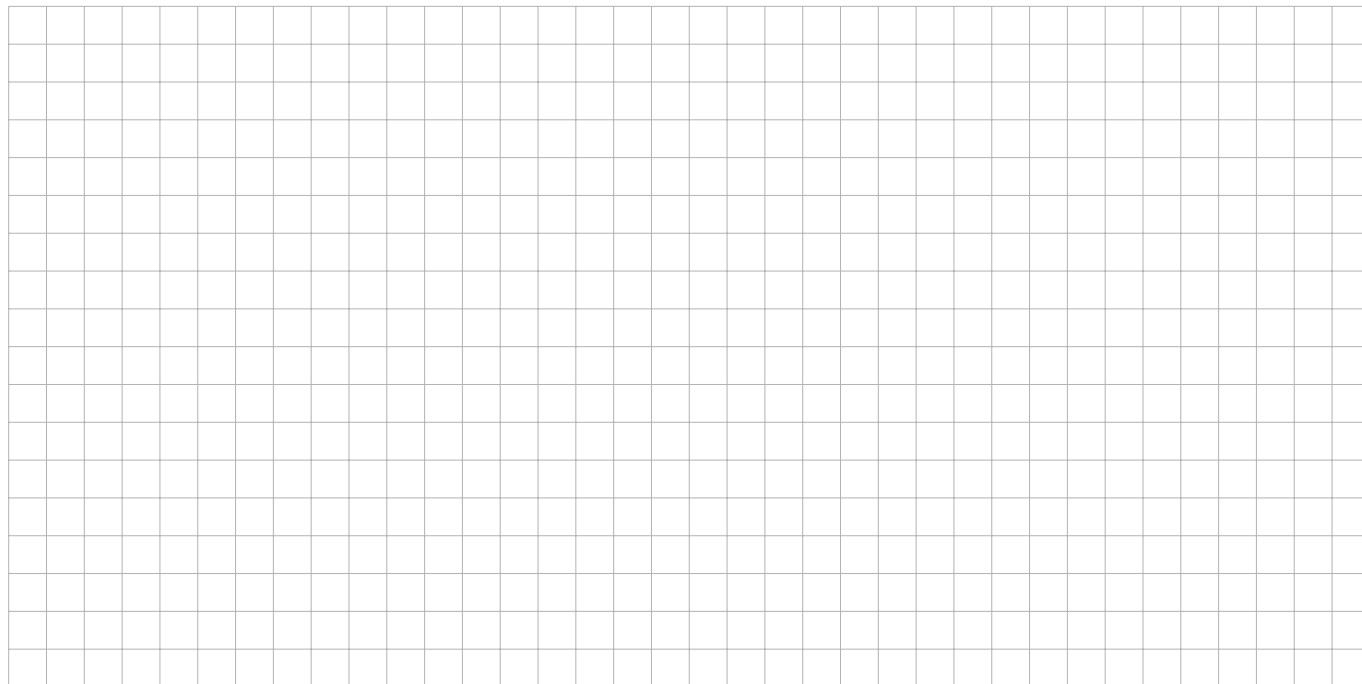


En appliquant la condition d'interférence constructive, on peut en déduire la distance entre deux nœuds consécutifs :





On peut aussi établir le même résultat par une approche graphique :



En adaptant le même raisonnement à l'étude des interférences constructives, on peut affirmer que **la distance entre deux ventres consécutifs vaut également $\frac{\lambda}{2}$** .

A.3 Forme mathématique d'une onde stationnaire

Montrons que l'onde stationnaire $s(x, t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$s(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$$



Contrairement aux ondes progressives $s_1(x, t)$ et $s_2(x, t)$, il est impossible d'écrire $s(x, t)$ sous la forme d'une fonction $f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$. C'est en cela qu'on reconnaît qu'il ne s'agit pas d'une onde progressive.

Par contre, $s(x, t)$ peut se mettre sous la forme $f(x)g(t)$, ce qui est caractéristique des ondes stationnaires.



Par ailleurs, on constate à partir de l'expression de $s(x, t)$ que chaque point vibre avec une amplitude prenant une valeur dépendant de l'abscisse x du point. Cette amplitude est :

$$A|\cos(kx + \psi)|$$

Cela nous permet de mieux comprendre la représentation spatiale de l'onde stationnaire :



B Modes propres d'une corde fixe en ses extrémités

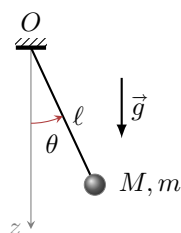
B.1 Qu'est-ce qu'un mode propre ?

► Définition générale

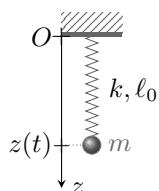
Définition

De manière générale, un mode propre d'un système oscillant correspond à une manière qu'a le système d'osciller **librement** (càd sans sollicitation extérieure) de manière **sinusoïdale** à une fréquence qui lui est propre, c'est-à-dire qui ne dépend que des caractéristiques physiques de ce système.

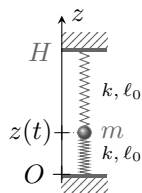
Nous avons ainsi déjà rencontré la notion de mode propre pour des systèmes physiques tels que ceux ci-dessous :



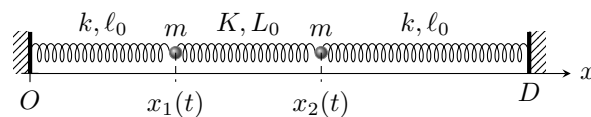
un seul mode propre de fréquence $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$



un seul mode propre de fréquence $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$



un seul mode propre de fréquence $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$



deux modes propres de fréquences $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ (mode symétrique) et $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$ (mode antisymétrique) (voir Exercice 8 du chapitre M2)



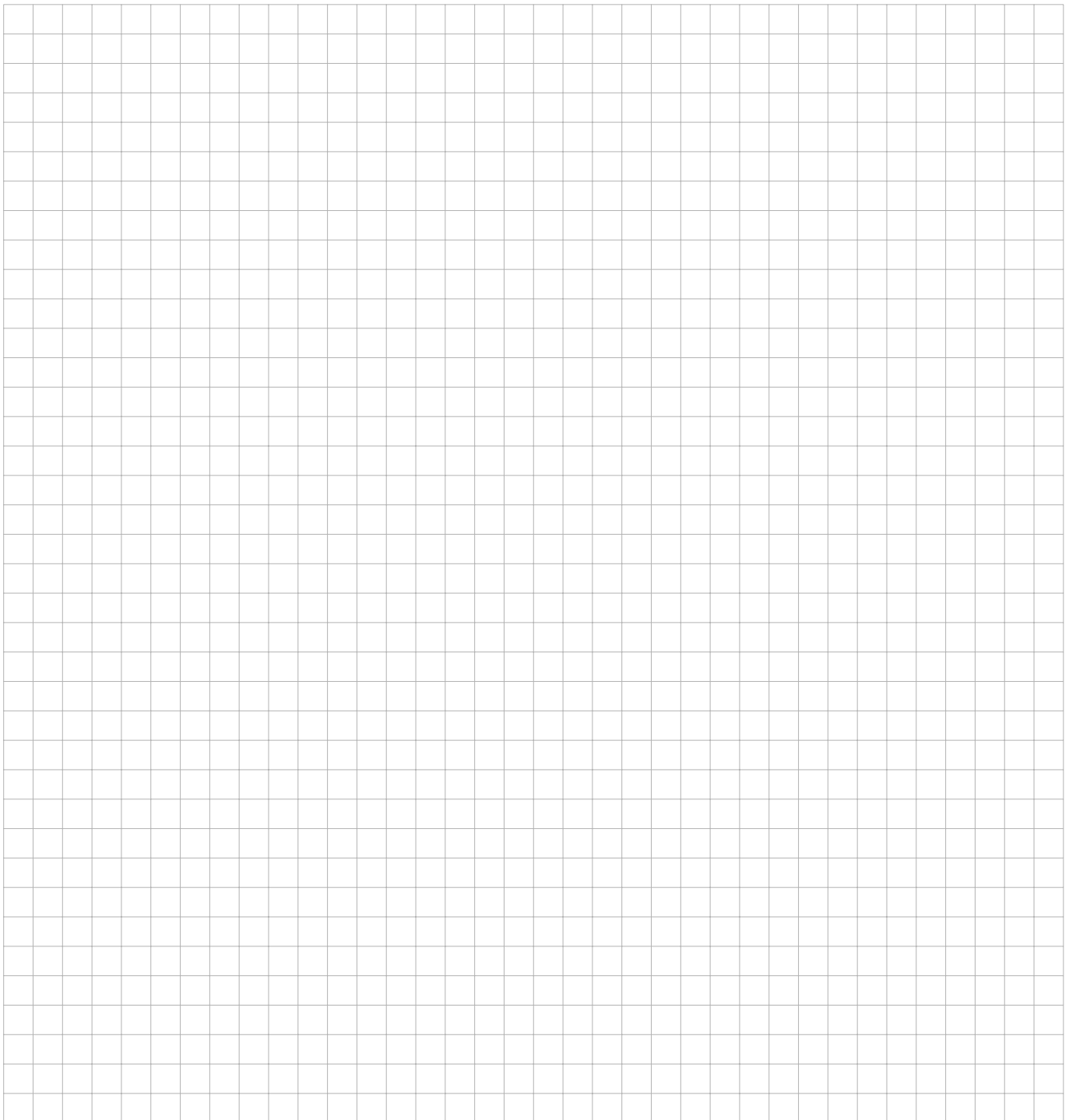
Voici une autre manière de faire. On sait que les systèmes oscillants ont tendance à résonner au voisinage proche de leurs fréquences propres et donc à vibrer suivant ce mode propre, grâce à l'excitation sinusoïdale imposée par l'expérimentateur réglée à la bonne fréquence (celle permettant une amplitude de vibration maximale).

Autrement dit, **il suffit de chercher à faire en rentrer la corde en résonance à l'aide d'un vibreur**, c'est précisément l'objet de l'**expérience de la corde de Melde** déjà évoquée dans la partie **A**. Et c'est précisément pourquoi cette expérience permet de mettre en évidence différentes fréquences de résonances elles-mêmes multiple entier d'une même fréquence puisque les fréquences des modes propres correspondent aux fréquences de résonance !

B.3 Expression mathématique d'un mode propre

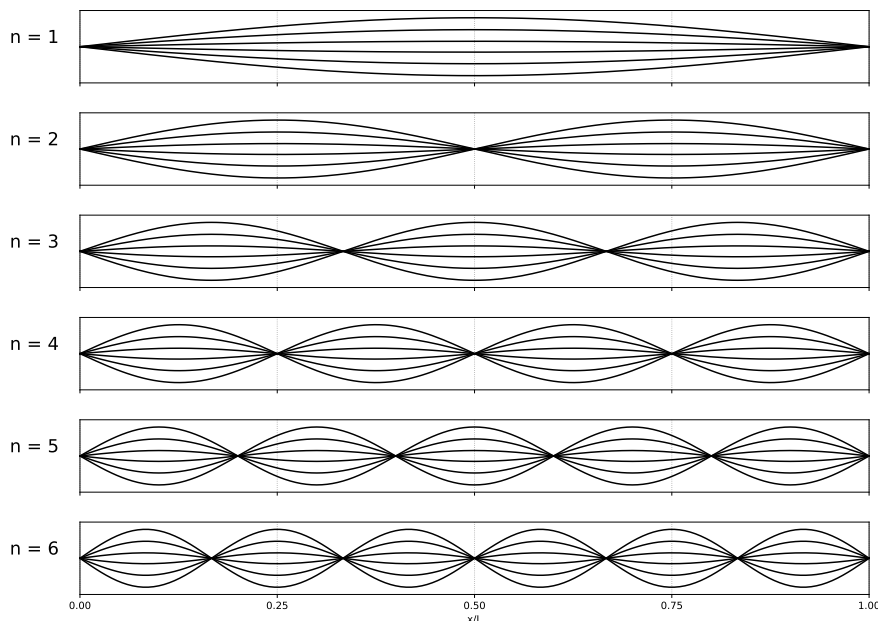
Puisqu'un mode propre quelconque de la corde correspond à une onde stationnaire, on sait déjà que l'altitude $z(x, t)$ de la corde est de la forme $A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$. Précisons davantage cette expression en exploitant les conditions aux limites.

Nous avons par exemple pour 3 fuseaux :





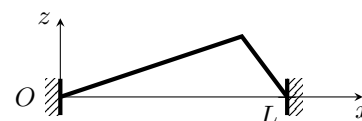
Ci-dessous les tracés de la fonction $s(x, t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega_n t + \phi_n)$ pour différentes valeurs de n et pour différents instants t :



B.4 Vibration quelconque d'une corde

a. Superposition de modes propres

En pratique, notamment dans le domaine musical et plus particulièrement dans le domaine des instruments à cordes, la corde jouée par le musicien ne prend pas une forme sinusoïdale, loin de là ! Une fois relâchée, la corde n'oscillera donc pas suivant un de ses modes propres. Souvent, la forme initiale imposée par le musicien est de forme triangulaire comme ci-contre (pour les instruments à corde pincées notamment).

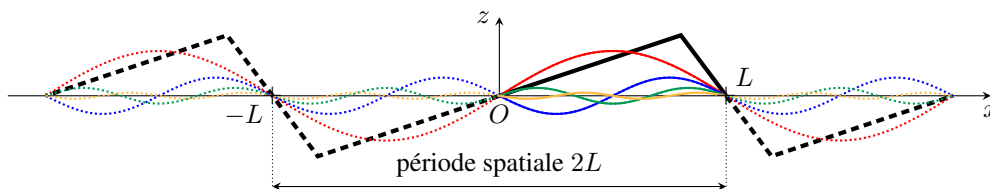


Toutefois, l'équation d'onde à laquelle obéit $z(x, t)$ et qui sera vue en 2ème année est linéaire. Par ailleurs, Les modes propres sont précisément des solutions de cette équation d'onde. Ainsi, d'après le principe de superposition, il est tout à fait possible d'affirmer que la corde vibrera selon une superposition de ses modes propres :

$$z(x, t) = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

R *Similaire encore une fois à ce qui avait été observé avec l'expérience des oscillateurs masse-ressort couplés ...*

Comment savoir quel est le poids relatif de chaque mode propre ? Autrement dit, quelles sont les valeurs des amplitudes A_n ? **Cela dépend de l'état initial de la corde.** Pour cela, on peut se servir de la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique. Préalablement, on peut «périodiser» la fonction $z(x, 0)$:



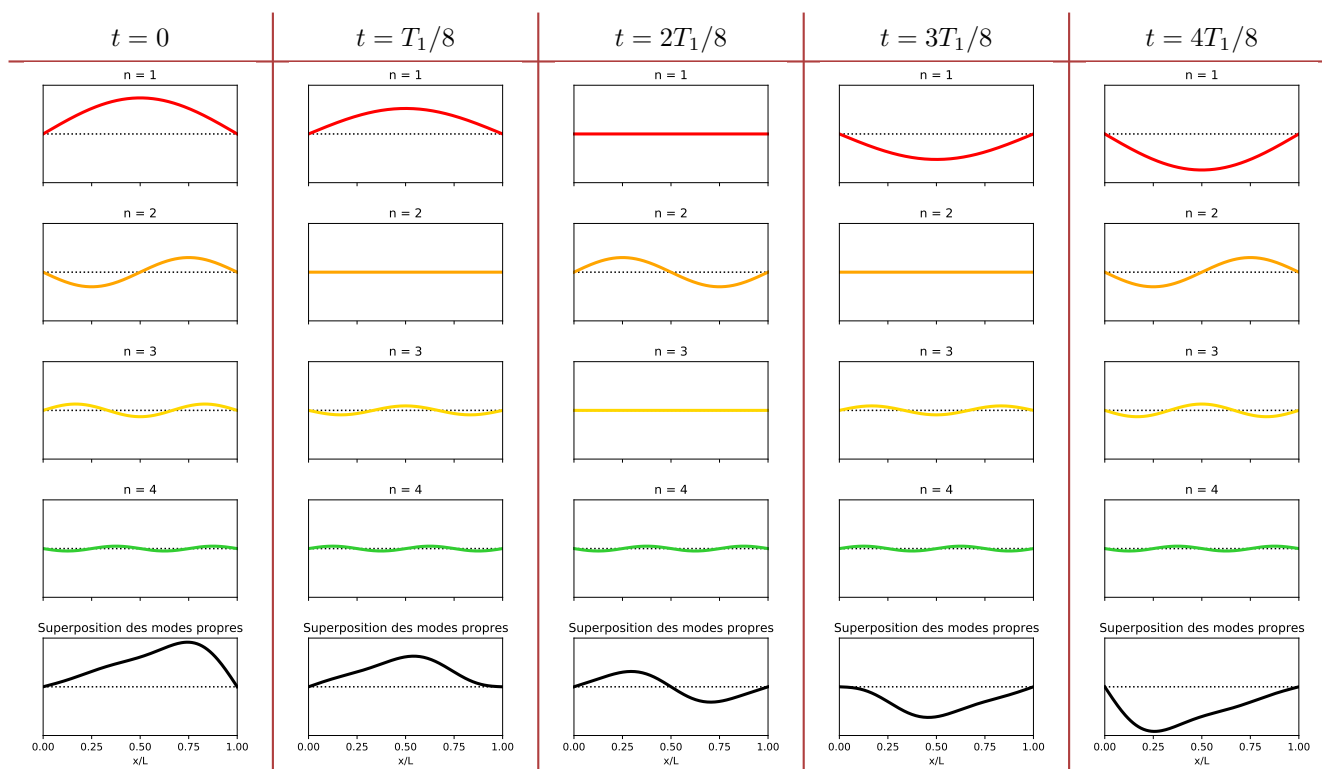
La fonction ainsi obtenue (en pointillés gras ci-dessus) est périodique de période spatiale $2L$ et donc de fréquence spatiale $\frac{1}{2L}$. En exploitant la décomposition en série de Fourier des fonctions périodiques, on peut écrire donc $z(x, 0)$ comme une superposition de fonction sinusoïdale de fréquence spatiale multiple entier de $\frac{1}{2L}$ et devant s'annuler en $x = 0$ et $x = L$ (nœuds aux extrémités) :

$$z(x, 0) = \sum_n A_n \cos\left(2\pi n \frac{1}{2L}x + \psi_n\right) \Rightarrow z(x, 0) = \sum_n \pm A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Dans la simulation, ci-dessous une amplitude A_n différente a été affectée à chaque mode propre de $n = 1$ jusqu'à $n = 6$ (mode 5 et 6 non-représentés ci-dessous toutefois) et ce afin d'imposer initialement à la corde une forme triangulaire.

(R) La forme triangulaire n'est pas parfaitement restituée car il aurait fallu rajouter des modes supplémentaires d'ordre supérieurs ...

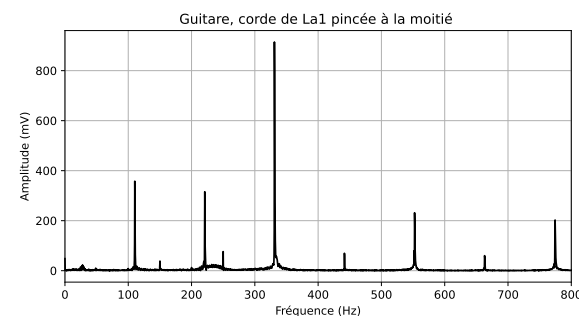
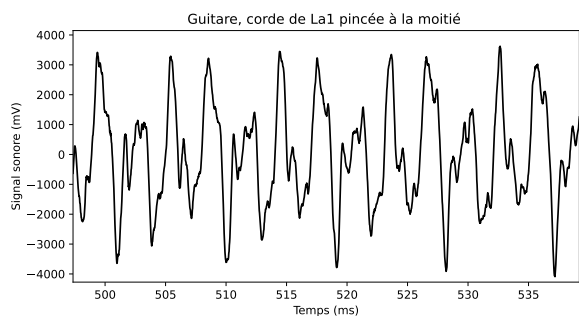
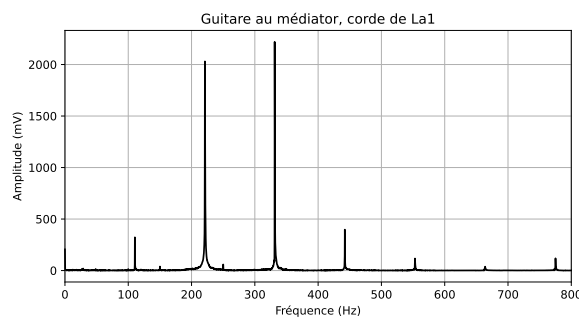
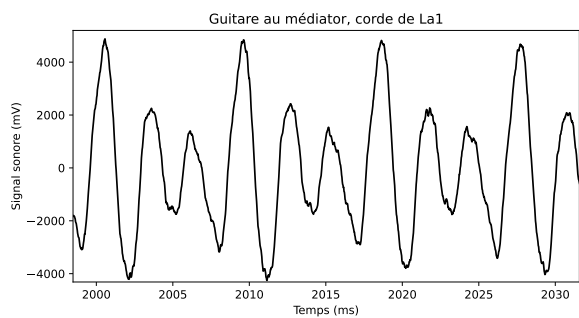
Puis, compte tenu de cet état initial, on laisse chaque mode propre évoluer au cours du temps et on observe la superposition de ces modes propres à chaque instant (T_1 représente la période du mode 1).



b. Hauteur d'une note et timbre d'un instrument

Pour un même instrument de musique, suivant la manière dont est préparée initialement la corde, les poids relatifs de chaque mode propre seront différents les uns des autres et ainsi, le spectre de la note jouée en sera donc affectée.

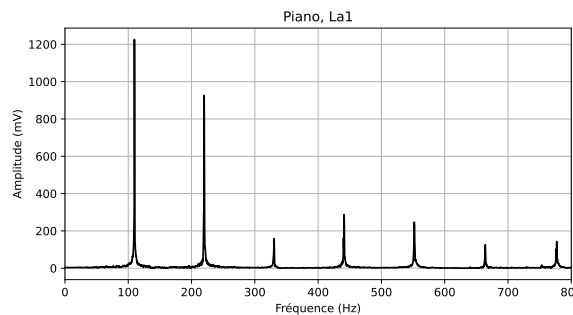
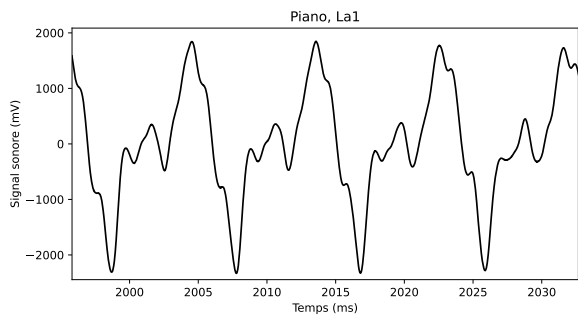
Voici par exemple une même note, le La 1, jouée sur une même guitare mais de deux manières différentes, soit frappée assez proche du chevalet (à environ $L/6$) soit à la moitié de la corde (à $L/2$) :



On constate une forte diminution du poids de l'harmonique de rang 2.

(R) Cela peut se comprendre intuitivement : l'harmonique de rang 2 présente un nœud au milieu de la corde, là où précisément on imposé une forte déformation initiale à la corde, ce qui est donc peu compatible, d'où un poids relatif moindre dans le spectre pour cette harmonique ...

Voici à présent la même note jouée au piano :



Pourquoi s’agit-il de la même note, alors que l’instrument est différent ? La **hauteur** de la note perçue par l’oreille correspond à la fréquence fondamentale et désigne justement la note qui est jouée (le La1 en l’occurrence). On voit bien qu’il s’agit de la même note pour les deux instruments puisque la fréquence fondamentale observée sur le spectre vaut 110 Hz dans les deux cas.

Voici un tableau (à ne pas connaître par cœur !) recensant pour chaque note la fréquence fondamentale correspondante :

NOTES		- 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Do	C	16,3	32,7	65	131	262	523	1 046,5	2 093	4 186	8 372	16 744
Do# ou Reb	C# / Db	17,3	34,6	69	139	277	554	1 109	2 217	4 435	8 870	17 740
Re	D	18,3	36,7	74	147	294	587	1 175	2 349	4 698	9 396	18 792
Re# ou Mib	D# / Eb	19,4	38,9	78	156	311	622	1 244,5	2 489	4 978	9 956	19 912
Mi	E	20,5	41,2	83	165	330	659	1 318,5	2 637	5 274	10 548	21 098
Fa	F	21,8	43,6	87	175	349	698,5	1 397	2 794	5 588	11 176	
Fa# ou Solb	F# / Gb	23,1	46,2	92,5	185	370	740	1 480	2 960	5 920	11 840	
Sol	G	24,5	49,0	98	196	392	784	1 568	3 136	6 272	12 544	
Sol# ou Lab	G# / Bb	26,0	51,9	104	208	415	831	1 661	3 322	6 645	13 290	
La	A	27,5	55,0	110	220	440	880	1 760	3 520	7 040	14 080	
La# ou Sib	A# / Bb	29,1	58,0	117	233	466	932	1 865	3 729	7 458	14 918	
Si	B	30,8	62,0	123	247	494	988	1 975	3 951	7 902	15 804	

Par ailleurs, l’allure du spectre du piano est très clairement différente de la guitare, ce qui attribue à la note jouée par l’instrument une «signature sonore» perçue à l’oreille différente de l’autre. Notamment, le piano semble conférer à la fondamentale un poids très important contrairement à la guitare. À l’inverse, l’harmonique de rang 3 s’exprime fortement à la guitare, on ne peut pas en dire autant pour le piano.

Plutôt que de parler de «signature sonore», le musicien parle de **timbre**, celui-ci étant donc étroitement lié au spectre de l’instrument. Le timbre d’un instrument correspond à une sensation auditive à l’écoute de l’instrument. Ainsi, le musicien le décrira avec des mots évocateurs :

Caractéristiques du spectre	Timbre correspondant
Fondamentale grave avec peu d’harmoniques	Timbre velouté, moelleux (type bourdons de l’orgue)
Fondamentale grave avec des harmoniques de faible intensité	Timbre pauvre, maigre (type instruments à cordes frottées orientaux : longue corde et petite caisse de résonance)
Harmoniques d’importance décroissante	Timbre rond, chaud, plein (type flûte traversière)
Harmoniques supérieures relativement intenses	Timbre éclatant, criard, aigre (type instruments à cordes frottées orientaux)
Fondamentale aigüe avec très peu d’harmoniques audibles	Timbre strident, perçant, détimbré
Pas de fondamentale et harmoniques inférieures faibles	Timbre nasillard (type clarinette ou basson)
Harmoniques impaires prédominantes	Timbre apparenté à la clarinette
Harmoniques paires prédominantes	Timbre clair (type violon)

Ce qui influence le timbre : forme et taille de l’instrument, matériaux employés, manière dont est émise la note (*comme nous l’avons vu avec la guitare*), ...