SIGNAUX (S)

Chapitre 4 : Ondes stationnaires

Prérequis

- chapitre **S2** - Propagation d'un signal
- chapitre **S3** - Interférences

Mots-clés

onde stationnaire, nœuds et ventres de vibration, modes propres de vibration

Plan du cours

S s f

Les savoirs et les savoir-faire

Capacités exigibles

- Caractériser une onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres.
- Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde.
- Utiliser la propriété énonçant qu'une vibration quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres.
- Relier les notions sur les ondes stationnaires avec celles utilisées en musique.

A Ondes stationnaires sinusoïdales

A.1 Contexte

1. Dans quel type de situation une onde stationnaire sinusoïdale peut-elle être observée ?
2. Pourquoi parle-t-on d'onde stationnaire ?

A.2 Nœuds et ventres de vibration

3. Définir «ventre», «noeud», «fuseau».
4. Exprimer le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}(x)$ entre deux ondes se propageant en sens opposé le long d'un axe Ox.
5. En déduire que la distance entre deux nœuds (ou deux ventres) consécutifs est égale à $\lambda/2$.

A.3 Forme mathématique d'une onde stationnaire

6. Montrer que l'onde stationnaire $s(x,t)$ résultant de la superposition de deux ondes progressives de même amplitude et de même pulsation ω, se propageant en sens contraire à la célérité c sur un axe (Ox) peut s'écrire sous la forme :

$$s(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)$$

7. À quoi reconnaît-on qu'il ne s'agit pas d'une onde progressive ?
8. En quoi l'expression de $s(x,t)$ précédente permet-elle de retrouver une distance de $\lambda/2$ entre deux nœuds (ou deux ventres) consécutifs ?

B Modes propres d'une corde fixe en ses extrémités

B.1 Qu'est-ce qu'un mode propre ?

9. Définir ce qu'est un mode propre de manière générale. Donner des exemples simples déjà rencontrés depuis le début de l'année.

B.2 Fréquence des modes propres d'une corde

10. Déterminer les fréquences f_n des modes propres d'une corde de longueur L fixe en ses deux extrémités.

B.3 Expression mathématique d'un mode propre

11. Déterminer l'expression mathématique de l'onde stationnaire $y(x,t)$ (y étant l'altitude de la corde) en exploitant les conditions aux limites.

B.4 Vibration quelconque d'une corde

12. Expliquer succinctement pourquoi la corde jouée sur un instrument de musique vibre selon une superposition de ses modes propres. Que peut-on en déduire sur le spectre de vibration de l'instrument ?
13. Qu'appelle-t-on hauteur d'une note ? timbre d'une note ?

Ex

Exercices

Difficulté de l'exercice (analyse, «technicité», ...) Durée de l'exercice

Compétences travaillées	Exercices 1	2	3	4	5
Exploiter l'expression générale d'une onde stationnaire				•	
Exploiter les conditions aux limites	•	•	•	•	•
Déterminer les fréquences des modes propres d'un système	•	•	•		•

Exercice 1 Fréquences propres d'un tuyau sonore

La colonne d'air contenue dans un instrument à vent (flûte, clarinette...) ou dans un tuyau d'orgue vibre selon des modes propres correspondant à des conditions aux limites données.
On rappelle que pour les ondes sonores, la grandeur se propageant est la surpression $p(M, t)$ (écart de pression par rapport à la pression de l'air au repos).
Il existe deux types de modélisation simple pour décrire ces modes de vibrations :
- si l'extrémité du tuyau est ouverte, la surpression acoustique est nulle à cette extrémité,
- si l'extrémité du tuyau est fermée, l'amplitude de variation de la surpression acoustique est maximale à cette extrémité.

La célérité des ondes sonores dans l'air sera notée c.

1. On considère un tuyau d'orgue modélisé par un tuyau de longueur L ouvert à ses deux extrémités
   (a) Représenter schématiquement la surpression pour les trois premiers modes propres.
   (b) Déterminer les fréquences des modes propres du tuyau. Quelle est l'expression de la fréquence fondamentale de la note jouée par un tel tuyau ?
   (c) Les grands orgues peuvent produire des notes très graves. En prenant $c = 331$ m.s^{-1}, célérité du son à 0 °C dans l'air, calculer la longueur minimale d'un tuyau produisant une note de fréquence $32,7$ Hz, correspondant au Do 0.
2. Une clarinette peut être modélisée par un tuyau sonore de longueur L fermé au niveau de l'embouchure et ouvert à l'autre extrémité.
   (a) Représenter schématiquement la surpression pour les trois premiers modes propres.
   (b) Déterminer les fréquences des modes propres du tuyau.
   Quelle(s) différence(s) peut-on remarquer lorsque l'on compare au tuyau d'orgue précédent ?
   (c) L'instrument est muni d'une « clé de douzième » qui ouvre un trou situé à distance $L/3$ de l'embouchure. Lorsque ce trou est ouvert la surpression est nulle en ce point. Quelles sont dans ce cas les longueurs d'ondes des modes propres du tuyau ? Quel est l'effet de l'ouverture du trou sur la fréquence du son émis par l'instrument ?

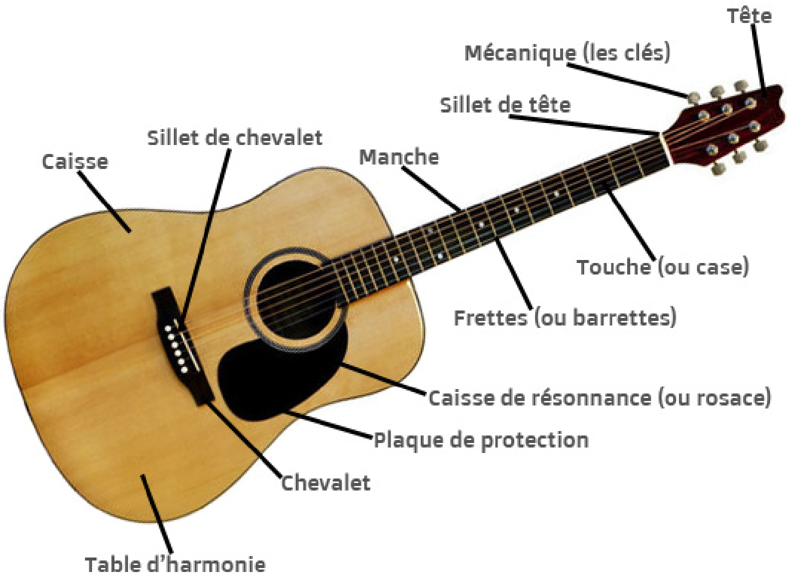
Exercice 2 Anharmonicité d'une corde de piano

On s'intéresse aux modes propres d'une corde de piano de longueur L, fixée en ses deux extrémités. On considère que la propagation des ondes est dispersive, cela étant du à la forte raideur de la corde. Pour une onde sinusoïdale de pulsation ω et de norme de vecteur d'onde k, on donne la relation mathématique entre ω et k (appelée *relation de dispersion* de manière générale...) : $\omega = vk\sqrt{1+\alpha k^2}$ où les constantes v et α dépendent de la section de la corde et de sa tension mais pas de sa longueur. Le coefficient α positif est de valeur d'autant plus importante que la raideur de la corde est forte.

1. Quelles sont les dimensions de v et α ?
2. Quelles sont les valeurs possibles de k pour une onde stationnaire existant sur cette corde ?
   Exprimer les fréquences correspondantes en fonction de v, α, L et d'un entier n.
3. Les cordes d'un piano de concert sont plus longues que les cordes d'un piano de salon. Pourquoi cela améliore-t-il la qualité musicale du son ?

Exercice 3 Notes sur une guitare

Pour pouvoir reproduire les notes d'une gamme tempérée sur une guitare, des frettes (tiges métalliques) sont disposées le long du manche. Ainsi, une fois que l'on presse avec le doigt la corde contre une frette, la longueur de corde vibrante (longueur utile) est la distance entre la frette et le sillet de chevalet (la portion de corde entre le sillet de tête et la frette ne vibrant pas). Par conséquent, pour une corde donnée, à chaque frette correspondra une note différente, et donc une fréquence fondamentale différente.

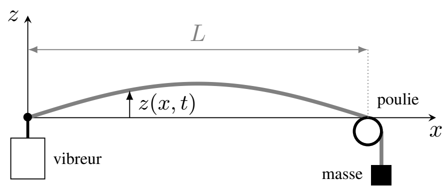


Notons $L = 63$ cm la longueur totale de corde (entre le sillet de tête et le sillet de chevalet).

1. Sur une corde de fréquence fondamentale f lorsqu'elle est jouée à vide (longueur utile égale à L), on souhaite produire le $k$ième demi-ton correspondant à cette note à vide, de fréquence $f_k = 2^{\frac{k}{12}} f$. Déterminer quelle doit être la distance ℓ_k entre le sillet de **chevalet** et la frette permettant de produire ce $k$ième demi-ton en fonction de k et L.
2. Pour chaque demi-ton de la gamme tempérée, calculer les distances ℓ_k (s'arrêter à $k = 7$) ; calculer également la distance $\ell_k - \ell_{k+1}$ entre deux frettes consécutives ainsi que le rapport ℓ_k / L. Présenter les résultats sous forme d'un tableau. Cela vous paraît-il cohérent avec la photographie de guitare proposée ci-dessus ?

Exercice 4 Résonances de la corde de Melde

On s'intéresse aux fréquences de résonance de la corde de Melde. On donne l'altitude du vibreur au cours du temps : $z_v(t) = A_v \cos(\omega t)$. On observe une onde stationnaire harmonique le long de la corde. On note $k = \dfrac{\omega}{c}$, c étant la célérité des ondes progressives le long de la corde.

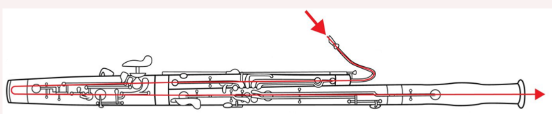


1. Montrer que : $z(x,t) = \dfrac{A_v}{\sin(kL)} \sin[k(L-x)] \cos(\omega t)$.
2. Quelles sont les fréquences pour lesquelles on pourra observer une résonance ? Commenter.

Résolution de problème

Exercice 5 Le basson

La note la plus grave que peut produire le basson est le si bémol 0 de fréquence 58 Hz.



Comment est-ce possible ?